ELEMENTOS TEÓRICOS PARA ANALIZAR EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL EN EL ESTUDIANTE

Lorena Inés Ramos Márquez, José Ramón Jiménez Rodríguez
lore_iramos@hotmail.com, jimenez@gauss.mat.uson.mx
Nivel Superior, Innovación Educativa
Universidad de Sonora. México

Autor de correspondencia: Lorena Inés Ramos Márquez

Resumen: Se presenta en este trabajo un avance de una investigación sobre el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de ingeniería durante su primer curso de cálculo, mediante la integración de diferentes herramientas digitales. En particular, se muestra un esfuerzo de adaptación del marco teórico presentado por Carlson y cols. (2002) y por Thompson (1994), denominado Razonamiento Covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos, con el fin de que sea congruente con la visión con la que desarrollamos esta investigación; se describen y ejemplifican las cinco grandes acciones mentales constitutivas del razonamiento covariacional, a partir del estudio de actividades de vaciado y llenado de recipientes, así como de movimiento, en las que además de las representaciones tabular, gráfica, analítica y verbal, se incluye una quinta modalidad: la representación digital.

Palabras claves: Pensamiento / Razonamiento covariacional, Acción mental

Abstrac. An advance of an investigation on the development of variational thinking in engineering students during their first calculus course is presented in this work, through the integration of different digital tools. In particular, an effort to adapt the theoretical framework presented by Carlson et al. (2002) and by Thompson (1994), called Covariational Reasoning applied to the modeling of dynamic events, in order to make it congruent with the vision with which we developed this research; The five major mental actions that make up covariational reasoning are described and exemplified, based on the study of activities of emptying and filling containers, as well as movement, in which in addition to the tabular, graphic, analytical and verbal representations, a fifth mode: digital representation.

Keyword: Covariational Thinking / Reasoning, Mental Action

1. INTRODUCCIÓN.

La investigación sobre la problemática del Cálculo, realizada en los últimos años, tiene ya importantes resultados, como es la identificación de sus principales causas (Artigue, 1995). Sin embargo, poco se ha logrado en la solución de esta problemática, a pesar de las muchas investigaciones que se han realizado en torno a cada una de las dificultades detectadas. Esto nos lleva a plantear la siguiente pregunta: ¿Qué podemos concluir ante los resultados de todas estas investigaciones? Una respuesta categórica nos la dan Imaz y Moreno (2010), cuando

Fecha de recepción: 27-01-2014
Fecha de aceptación:25-04-2014

consignan lo que ellos perciben como la "conclusión pedagógica" de todas estas investigaciones: el currículo actual es la fuente del problema.

Lo anterior implica la necesidad de un replanteamiento de los objetivos y contenidos del curso de Cálculo. ¿Cómo hacerlo? ¿En base a qué se tendrían que proponer cambios? Estos autores proponen una revisión histórica de la evolución del currículo del Cálculo; ellos mismos realizan parcialmente esta revisión, y como uno de sus principales resultados concluyen que el currículo actual no responde a las necesidades u objetivos principales del Cálculo: el estudio de los fenómenos de variación, sino que se orienta al estudio de los objetos matemáticos pertenecientes al Análisis Matemático, basándose en procedimientos y demostraciones rigurosas para la formalización de dichos objetos matemáticos.

Una observación más que podemos hacer a partir de esta diferenciación entre Cálculo y Análisis Matemático, es que la mayoría de las investigaciones y esfuerzos por reducir la problemática en su aprendizaje, están orientados hacia los objetos del Análisis Matemático.

Aun en la comunidad de Matemática Educativa, pareciera que algunas investigaciones quieren entrar de lleno en el área del Cálculo con una visión nueva sobre la variación, sin embargo, creemos que no logran desprenderse del todo del Análisis Matemático.

Esta nueva visión para el estudio de la didáctica del Cálculo ha puesto especial interés en el desarrollo de una nueva forma de pensamiento, el pensamiento variacional, que es también el tema de estudio en la investigación que tenemos en curso.

2. PENSAMIENTO VARIACIONAL.

La investigación en Matemática Educativa dentro de la línea del Cálculo ha creado diferentes conceptos, íntimamente relacionados con el aprendizaje de la matemática del cambio y la variación; éstos están siendo usados como herramientas en la implementación de reformas educativas y como herramientas teóricas en diferentes investigaciones. Uno de ellos el de pensamiento variacional ha tenido diferentes interpretaciones y usos en algunas investigaciones educativas.

a) *La matemática del cambio*, surgido en el seno del movimiento de reforma del Cálculo en EUA en los años ochentas.
b) El concepto de *Cálculo cualitativo*, desarrollado en el seno del grupo de trabajo liderado por Kaput para la organización TERC en Estados Unidos, y en el Centro de Investigación Shell en Inglaterra.
c) El concepto de *Pensamiento variacional*, desarrollado por Vasco para la reforma curricular de Colombia de finales de los noventas.
d) El concepto de *Pensamiento funcional* de Cuevas, Pluvinage y colaboradores. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV.
e) El concepto de *Pensamiento y lenguaje variacional*, desarrollado por Cantoral, Farfán y su equipo de colaboradores, con influencia hacia algunos grupos latinoamericanos. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV.
f) El concepto de *razonamiento covariacional*, desarrollado por Carlson y Thompson.

Por ser congruente con nuestra visión sobre la enseñanza del Cálculo y para la realización de nuestra investigación, hemos elegido el marco teórico presentado por Carlson y cols. (2002) y por Thompson (1994), denominado Razonamiento Covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos. En este enfoque, el razonamiento covariacional se modela mediante la concatenación de una serie de acciones mentales complejas, que reflejan distintos niveles de desarrollo de dicha forma de pensamiento.

El enfoque nos ha parecido limitado por dos razones:

a) se centra solamente en el Cálculo Diferencial, aunque recientemente sus autores han hecho esfuerzos por ampliarlo al Cálculo Integral (Thompson, 2013); y,

b) No consideran todas las representaciones semióticas de las ideas fundamentales constitutivas del pensamiento variacional y sus posibles interrelaciones.

En este trabajo se presenta nuestro esfuerzo de adaptación del marco teórico referido; se describen y ejemplifican las cinco grandes acciones mentales constitutivas del razonamiento covariacional, a partir del estudio de actividades de vaciado y llenado de recipientes, así como de movimiento, en las que además de las representaciones tabular, gráfica, analítica y verbal, se incluye una quinta modalidad: la representación digital. Ésta consiste en el último fotograma de un video digital de cada fenómeno, en el que se ha hecho un trabajo de edición denominado punteo, que consiste en insertar marcas en ciertos lugares del fotograma (nivel de agua en el recipiente, borde del recipiente al nivel del agua, posición del objeto que se mueve) a intervalos regulares de tiempo.

3. MODELACIÓN DEL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL MEDIANTE ACCIONES MENTALES.

Este marco conceptual modela el desarrollo del pensamiento covariacional por niveles, clasificándolo en cinco niveles que van desde el Nivel 1 (el más elemental) hasta el Nivel 5 (el más desarrollado), y que quedan descritos por la manifestación de ciertos comportamientos de análisis y sus razonamientos acerca de los fenómenos o situaciones de covariación a la que son enfrentados los estudiantes, estos comportamientos corresponden con lo que en este marco se llama *acción mental*, también clasificadas en cinco tipos (AM1 – AM5).

Cada acción mental se puede describir a través de la combinación de las imágenes de covariación que el estudiante vaya formando, y de los razonamientos que exprese durante la actividad. Estos comportamientos reflejan o exteriorizan el tipo de coordinación que el estudiante es capaz de hacer sobre las magnitudes variables involucradas en el fenómeno y/o sobre su razón de cambio.

Es oportuno mencionar que la descripción de cada nivel de razonamiento covariacional, no es solo en función de la acción mental asociada a ese nivel, sino a ésta y todas aquellas que la preceden; así pues, para poder ubicar a un estudiante en el nivel 4, tendrá que mostrar comportamientos que evidencien el dominio de acciones mentales del tipo 1 hasta el tipo 4 (AM1 – AM4).

ELEMENTOS TEÓRICOS PARA ANALIZAR EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL EN EL ESTUDIANTE

En los párrafos que siguen procedemos a comentar brevemente la definición de cada una de las acciones mentales constitutivas del razonamiento covariacional, y a describirlas en el caso concreto de las actividades sobre llenado/vaciado de recipientes y de movimiento, que se plantearán a los estudiantes.

ACCIÓN MENTAL 1 (AM1): Según la definición, la AM1 marca el inicio de las habilidades en el razonamiento covariacional. El estudiante tiene que ser capaz de coordinar los cambios de una variable con respecto de otra, a través de un ***proceso*** que inicia con la identificación de las diferentes magnitudes involucradas en el fenómeno: constantes, parámetros y variables; continúa con la identificación de los tipos básicos de variación que presentan las magnitudes variables detectadas, para culminar la acción con la coordinación de las formas de relacionarse dichas magnitudes en una relación de dependencia.

Algunos de los comportamientos que se pueden observar en los estudiantes, dependiendo del registro de representación en que se analice el fenómeno, son los siguientes.

a) En el uso del lenguaje: éste será un tipo de comportamiento que esperamos se presente en forma simultánea en todos los registros que consideraremos, ya que con explicaciones verbales será como se pueda evidenciar la presencia de los comportamientos esperados. Así por ejemplo, será de forma verbal que el estudiante enumere o señale todas las cualidades medibles del fenómeno, por ejemplo el tiempo y la altura del líquido en el recipiente.

b) En el video: Identificación visual de magnitudes que cambian. Se puede observar un ejemplo de ellas en las siguientes imágenes de un fotograma del video referente a recipientes, en el que el estudiante podrá identificar magnitudes variables como altura, volumen, áreas, radio, diámetro, largo, según la forma del recipiente. En el caso del péndulo, de igual manera puede darse la identificación de las magnitudes que cambian, como son las distancias recorridas por el péndulo en las distintas direcciones, horizontal, vertical o la distancia recorrida sobre el arco que va formando la trayectoria del mismo, incluyendo en todos estos casos la identificación de ejes de referencia para la medición de estas magnitudes. Para concretar la presencia de la AM1 se tendrán que manifestar además, comportamientos que muestren de qué forma se relacionan estas magnitudes encontradas; ejemplos de estas relaciones pudieran ser: altura-tiempo, volumen-altura, volumen-tiempo, área-radio, área-tiempo, distancia-tiempo. Se deberá especificar en cada caso cuál de las magnitudes se tratará como variable independiente, y por qué.

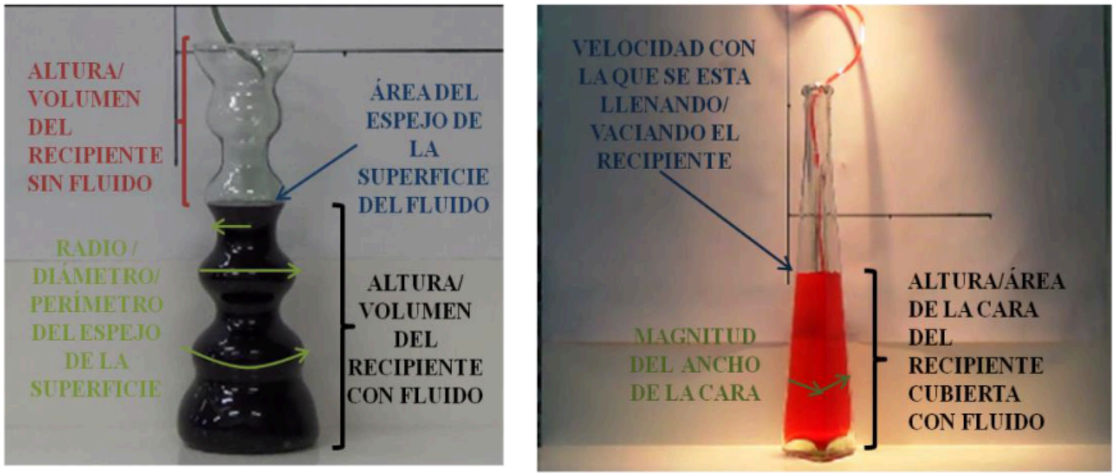

Figura 1. Imagen de video con ejemplos de las magnitudes que se pueden percibir durante el fenómeno de llenado o vaciado del recipiente.

c) En la tabla: El proceso de punteo da como resultado una tabla de valores numéricos de al menos tres columnas (tiempo, coordenada x, coordenada y). Entre los comportamientos a observar se pueden encontrar algunos movimientos o señalamientos sobre la tabla que muestren que cada columna representa una magnitud variable, definiendo así también qué papel jugará cada variable (por lo general, se considera que los valores de la variable en la segunda columna dependen de los valores de la que se encuentra en la primer columna).

a) Identificación de dos magnitudes variables: *x, y*

b) Identificación del cambio en cada una de las magnitudes variables: *x, y*

x	y
2.233328	0.062613
5.399986	0.062162
8.566644	0.062162
11.733303	0.061712
14.899961	0.061261
18.06662	0.060811
21.233278	0.06036

C) Identificación de independencia *(x)* /dependencia *(y)* de las variables

Figura 2. Indicaciones sobre el registro tabular que evidencian la coordinación de los cambios en dos magnitudes variables.

d) En la gráfica: Los comportamientos que muestren la coordinación entre las variables será el establecimiento de los ejes coordenados (por lo general x, y), señalando que si se da un cambio en la coordenada x también se presentará un cambio en el valor de la coordenada y. Es importante el señalamiento de cuál de las coordenadas es vista como variable independiente.

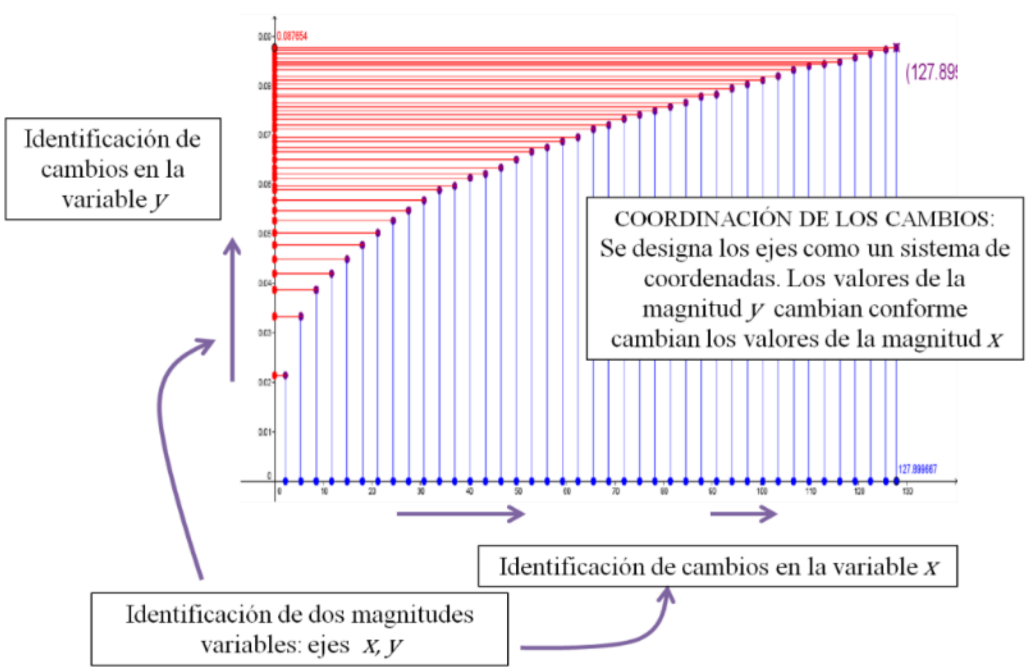

Figura 3. Indicaciones sobre el registro gráfico que evidencian la coordinación de los cambios en dos magnitudes variables.

e) En la forma algebraica: Un comportamiento importante es la identificación del papel que juega cada una de las variables involucradas, y por qué se le da este papel a cada una de ellas, obteniendo expresiones algebraicas donde x es quien determina los valores de y, pudiendo señalar los posibles valores para x. Por mencionar algunos ejemplos tendremos:

MEDIDAS DEL RECIPIENTE: $\boldsymbol{D} = 0.1280905$ $\boldsymbol{H} = 0.084676833$ $\boldsymbol{R} = 0.06416575$

$\boldsymbol{r} = \{0.062613, 0.062162, 0.062162, 0.061712, 0.061261, 0.060811, 0.06036, 0.05991, 0.059459, 0.059009, 0.059009, 0.058559, 0.057658, 0.056757, 0.056306, 0.055405, 0.054955, 0.054505, 0.053604, 0.053153, 0.052252, 0.051802, 0.050901, 0.05, 0.049099, 0.048198, 0.046847, 0.046396, 0.045495, 0.044595, 0.043694, 0.042342, 0.041441, 0.04009, 0.038288, 0.035586, 0.033784, 0.030631, 0.027477, 0.022973, 0.012162\}$

$$r = \frac{R}{H}\,h$$ Identifica quiénes juegan el papel de variables: ***r, h***

Figura 4. Representación algebraica de diferentes magnitudes, así como de su relación de dependencia.

ACCIÓN MENTAL 2 (AM2): El avance que se da en esta acción mental, es el hecho de que, además de identificar los cambios en las variables, también se coordina el sentido en el que se da ese cambio; es decir, se identificará que al cambiar una de las variables la otra presenta una disminución o un aumento. Aquí es donde se requiere describir el fenómeno como un conjunto sucesivo de *estados,* que están marcados o definidos por los valores numéricos que poseen las magnitudes variables en cada uno de ellos. Para dar sentido y dirección a los cambios de las magnitudes variables durante el transcurso del fenómeno, se comparan dos de sus diferentes estados, llamándolos *estado inicial* y *estado final.* Con lo anterior podemos decir que para evidenciar AM2, exigiremos la identificación del comportamiento variacional general que está presentando el fenómeno: crecimiento, decrecimiento. En los casos que estamos analizando, los comportamientos que se presentarán en esta acción mental serán:

a) En el video: En el caso de el fenómeno de vaciado, que conforme pasa el tiempo, la altura y el volumen del fluido disminuyen, por mencionar algunas. En el caso del péndulo, la identificación del sentido en el que, conforme transcurre el tiempo, cambia la distancia (horizontal o vertical) con respecto al eje establecido como referencia, comportándose ésta en algunos momentos de manera creciente, y en otros, de manera decreciente.

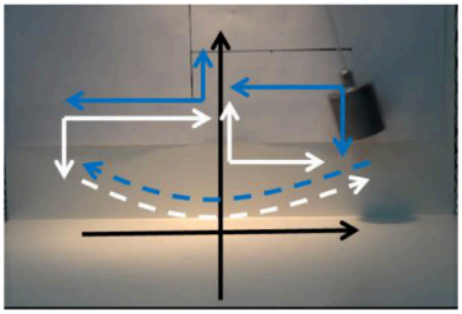

Figura 4. Sentido del cambio. Las flechas discontinuas indican el sentido en el que se mueve el péndulo, las líneas continuas indican el comportamiento variacional de la distancia (horizontal o vertical).

b) En la tabla: Uno de los comportamientos a observar en esta segunda acción mental consiste en la identificación del hecho de que, conforme se avanza hacia abajo en los renglones de la tabla, los valores de la primer columna siempre aumentan, mientras que los de la segunda columna tienen un comportamiento ya sea creciente (altura respecto al tiempo en el llenado de recipiente) o decreciente (volumen respecto a la altura en el vaciado de recipiente) según sea el fenómeno observado, pudiendo ser (como en el caso del péndulo) que se identifique en una parte decrecimiento y en otra crecimiento.

Crece

t(s)	x(m)
3.033295	0.16406
3.083295	0.15703
3.133294	0.14297
3.183293	0.12422
3.233293	0.10078
3.283292	0.071875
3.333291	0.039063
3.383291	0.0070313
3.43329	-0.028125
3.48329	-0.061719
3.533289	-0.09375
3.583288	-0.12109
3.633288	-0.14375
3.683287	-0.16172
3.733286	-0.175
3.783286	-0.18125
3.833285	-0.18047
3.883285	-0.17578
3.933284	-0.16172
3.983283	-0.14375
4.033283	-0.12031
4.049949	-0.11172
4.066616	-0.10156
4.083282	-0.091406
4.133281	-0.060156
4.183281	-0.026563
4.199947	-0.014844
4.249947	0.019531
4.299946	0.052344
4.349945	0.082813
4.399945	0.11016
4.449944	0.13125
4.499943	0.14844
4.549943	0.15938
4.599942	0.16406

Decrece

Crece

Figura 5. Tabla correspondiente a la información generada durante el análisis del video, relativa al péndulo en el transcurso de un periodo, identificando el comportamiento variacional básico que presenta la distancia x.

c) En la gráfica: Los comportamientos esperados, en el ámbito gráfico, serán la construcción o bosquejo de gráficas donde muestre el sentido del cambio en los valores de las magnitudes variables involucradas.

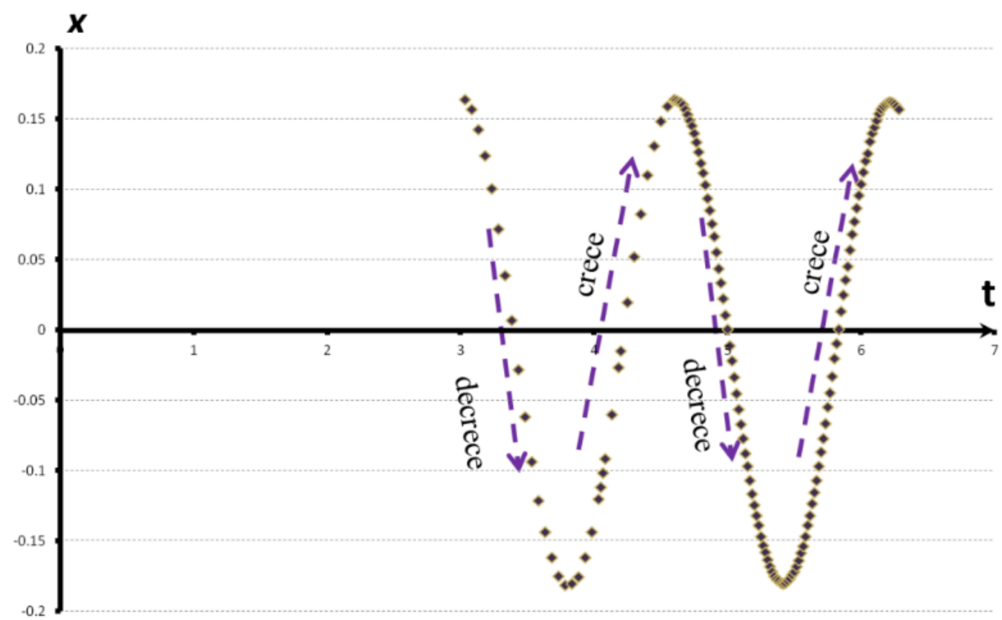

Figura 5. Gráfica donde se observa el sentido del cambio en los valores de las magnitudes variables x y t relacionadas con el movimiento del péndulo.

d) En la forma algebraica: Se espera que se dé un comportamiento respecto a la interpretación a groso modo del efecto que provoca sobre la variable dependiente el hecho de que se modifiquen (por lo general aumenten) los valores de la variable independiente.

$$x_f = x_i + \Delta x$$

$$y_f = y_i + \Delta y$$

Donde:

x_i, y_i representan los valores de las magnitudes variables en el estado inicial, y x_f, y_f representan los valores finales de dichas magnitudes variables.

Δx: cambio que tiene la magnitud x

Δy: cambio que tiene la magnitud y

Si se hace que el cambio Δx sea siempre positivo y constante, se podrá precisar la primer clasificación del comportamiento variacional, tomando en cuenta el signo de Δy.

$\Delta y > 0$ ➔Crecimiento

$\Delta y < 0$ ➔ Decrecimiento

$\Delta y = 0$ ➔ No hay cambio.

e) En el uso del lenguaje: Al igual que en la AM anterior, el uso de la verbalización puede estar presente en cada uno de los comportamientos que se manifiesten bajo esta actividad mental, en donde será por medio del lenguaje que se refuerce el conocimiento del sentido en que se está dando el cambio de las magnitudes variables. Pueden existir verbalizaciones acerca del comportamiento de cada una de las variables, por ejemplo: “La variable independiente siempre crece”, “si la variable independiente siempre crece, entonces la variable dependiente siempre disminuye”.

ACCIÓN MENTAL 3 (AM3): Esta acción mental se enfoca en la cuantificación del cambio, de tal manera que se lleva a cabo la coordinación de la cantidad de cambio en la variable independiente, con la cantidad de cambio en la variable dependiente. Al igual que en los casos anteriores, describimos a continuación posibles comportamientos que evidenciarían el dominio de esta acción mental.

a) En el video: Se utilizará para el reconocimiento de esta acción mental, el trabajo de análisis sobre el último fotograma punteado del video. El comportamiento esperado para reconocer el dominio de esta acción mental consistirá en coordinar la magnitud de separación entre las marcas en el fotograma con la conciencia de que dichas marcas fueron realizadas con la misma separación temporal. En cualquiera de los casos, será fundamental el enunciado del comportamiento de esas separaciones: “están cada vez mas juntas” ó “están cada vez mas separadas”

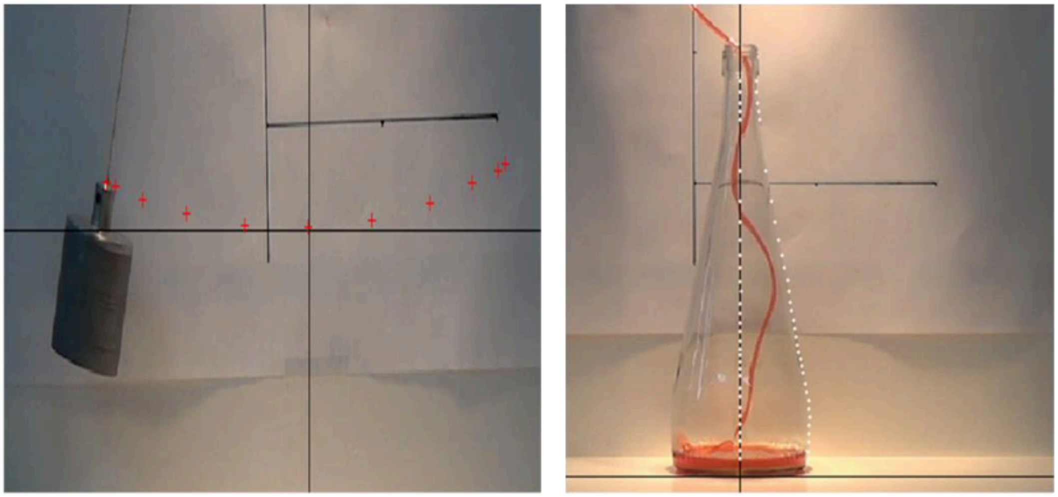

Figura 6. Imagen del punteo sobre un fotograma, donde se observa la separación de las marcas tomadas a intervalos iguales de tiempo en los fenómenos de movimiento del péndulo y vaciado de un recipiente.

b) En la tabla: El comportamiento esperado consiste en la coordinación entre los cambios que se dan en los valores de la variable de la segunda columna, en relación con los cambios de los valores de la variable de la primera columna. Esperamos expresiones que relacionen la cantidad de cambio en los valores de la variable de la primera columna de un renglón a otro, relacionándolo con la cantidad de cambio obtenida en los mismos renglones para los valores

c) de la segunda variable (columna). Al desarrollar esta AM, el estudiante podría considerar o sugerir cambios de igual magnitud para los valores de la variable independiente sobre toda la tabla.

t	x	Δt	Δx
3.033295	0.16406		
3.083295	0.15703	0.016667	-0.00313
3.133294	0.14297	0.016666	-0.00469
3.183293	0.12422	0.016666	-0.00703
3.233293	0.10078	0.016667	-0.0086
3.283292	0.071875	0.016666	-0.010156
3.333291	0.039063	0.016666	-0.010937
3.383291	0.0070313	0.016667	-0.0085937
3.43329	-0.028125	0.016666	-0.010156
3.48329	-0.061719	0.016667	-0.011719
3.533289	-0.09375	0.016667	-0.010156
3.583288	-0.12109	0.016666	-0.00937
3.633288	-0.14375	0.016667	-0.00625
3.683287	-0.16172	0.016666	-0.00469
3.733286	-0.175	0.016666	-0.00312
3.783286	-0.18125	0.016667	-0.00078
3.833285	-0.18047	0.016666	0.00078
3.883285	-0.17578	0.016667	0.00078
3.933284	-0.16172	0.016667	0.00469
3.983283	-0.14375	0.016666	0.00703
4.033283	-0.12031	0.016667	0.0086
4.049949	-0.11172	0.016666	0.00859
4.066616	-0.10156	0.016667	0.01016
4.083282	-0.091406	0.016666	0.010154
4.133281	-0.060156	0.016666	0.010157
4.183281	-0.026563	0.016667	0.013281
4.199947	-0.014844	0.016666	0.011719
4.249947	0.019531	0.016667	0.0117185
4.299946	0.052344	0.016666	0.011719
4.349945	0.082813	0.016666	0.009375
4.399945	0.11016	0.016667	0.00938
4.449944	0.13125	0.016666	0.00703
4.499943	0.14844	0.016666	0.00547
4.549943	0.15938	0.016667	0.00391
4.599942	0.16406	0.016666	0.00078

Cambios iguales de t se relacionan con cambios negativos cada vez mayores (en valor absoluto) en x, **(decrece cada vez más)**

Cambios iguales de t se relacionan con cambios negativos cada vez menores (en valor absoluto) en x, **(decrece cada vez menos)**

Cambios iguales de t se relacionan con cambios positivos cada vez mayores en x, **(crece cada vez más)**

Cambios iguales de t se relacionan con cambios positivos cada vez menores en x, **(crece cada vez menos)**

Figura 7. La coordinación de los cambios en una tabla de valores numéricos.

d) En la gráfica: El comportamiento esperado del alumno consiste en interpretar los valores de Δx como un conjunto de segmentos horizontales, uno por cada punto de la gráfica, excepto el último, e interpretar los valores de Δy como un conjunto de segmentos verticales, también uno por cada punto de la gráfica, excepto el primero. También se espera que asocie la dirección hacia arriba de estos segmentos verticales con el crecimiento, y la dirección hacia abajo, con el decrecimiento. Igualmente se espera que asocie el tamaño de estos segmentos con el comportamiento variacional acelerado (cada vez más grandes) o desacelerado (cada vez más pequeños).

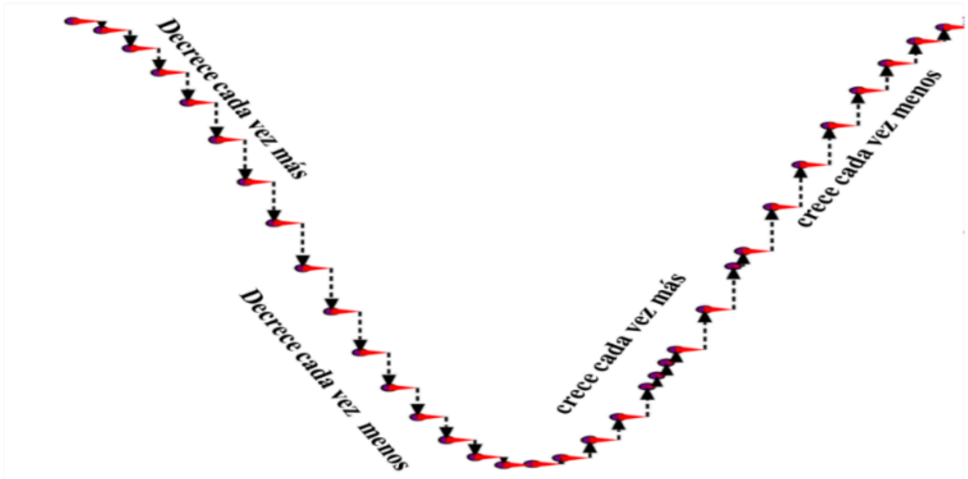

Figura 8. La coordinación de los cambios absolutos en la gráfica.

e) En la forma algebraica: El comportamiento esperado en esta situación consiste en la cuantificación del cambio mediante procedimientos algebraicos, a partir de la expresión algebraica que relaciona las magnitudes variables.

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

ACCIÓN MENTAL 4 (AM4): Es aquí en donde se presenta de una forma clara la coordinación entre los cambios uniformes de la variable independiente con los cambios de la variable dependiente, hablando claramente de la existencia de las razones de cambio promedio para cada intervalo considerado. En los comportamientos esperados por parte del estudiante en este nivel, está un análisis más consciente de la razón de cambio, considerando diferentes formas de obtenerla.

a) En el video: Continuando con el trabajo sobre el último fotograma, los comportamientos para hacer presente el dominio de esta acción mental se darán al coordinar y relacionar la magnitud de separación entre las marcas en el fotograma punteado en relación a la magnitud del intervalo en que fueron hechas (cada marca para obtener el valor de la variable dependiente se hace a intervalos de igual duración). Dentro de la verbalización se podrán enunciar para el caso de nuestros fenómenos de estudio, la razón de cambio de la altura en el vaciado del recipiente conforme pasan periodos de tiempo de la misma magnitud, o la razón a la que aumenta la superficie del espejo del líquido conforme disminuye la altura en la misma cantidad cada vez, también la razón de cambio de la distancia hacia el eje de referencia del péndulo.

b) En la tabla: En el desarrollo del razonamiento covariacional, en esta AM se tendrá que continuar el análisis, con la coordinación del cociente de las diferencias de los cambios absolutos, e interpretarlos como una razón de cambio promedio. Se podrán observar otros comportamientos como el agregar columnas a la tabla para incluir en ellas las diferencias calculadas, y establecer con mayor precisión la relación entre ellas, es decir, la razón de cambio.

x	y	Δx	Δy	m=Δy/Δx	
0.170	0.0302				
0.164	0.0271	-0.006	-0.0031	0.516666667	crecimiento desacelerado
0.141	0.0217	-0.023	-0.0054	0.234782609	
0.105	0.0124	-0.036	-0.0093	0.258333333	
0.054	0.00465	-0.051	-0.00775	0.152859961	
-0.001	0.00155	-0.055	-0.0031	0.056286882	
-0.056	0.00233	-0.055	0.00078	-0.014175375	decrecimiento acelerado
-0.106	0.00775	-0.050	0.00542	-0.107968127	
-0.144	0.014	-0.038	0.00625	-0.164473684	
-0.167	0.0202	-0.023	0.0062	-0.269565217	

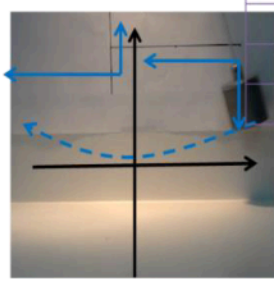

Figura 8. Representación tabular de los valores de las magnitudes variables, y de sus cambios absolutos de un recorrido del péndulo, con su tratamiento para obtener la razón de cambio promedio.

c) En la gráfica: En éste ambiente, el estudiante deberá ser capaz de formar rectas secantes entre los puntos contiguos de la gráfica, reforzando esta acción al verbalizar sobre la relación entre cada una de ellas con su pendiente como la razón de cambio. También se espera que inicie con la identificación de puntos importantes de la gráfica, como son los puntos extremos, de inflexión o concavidades y su relación con el comportamiento de las pendientes.

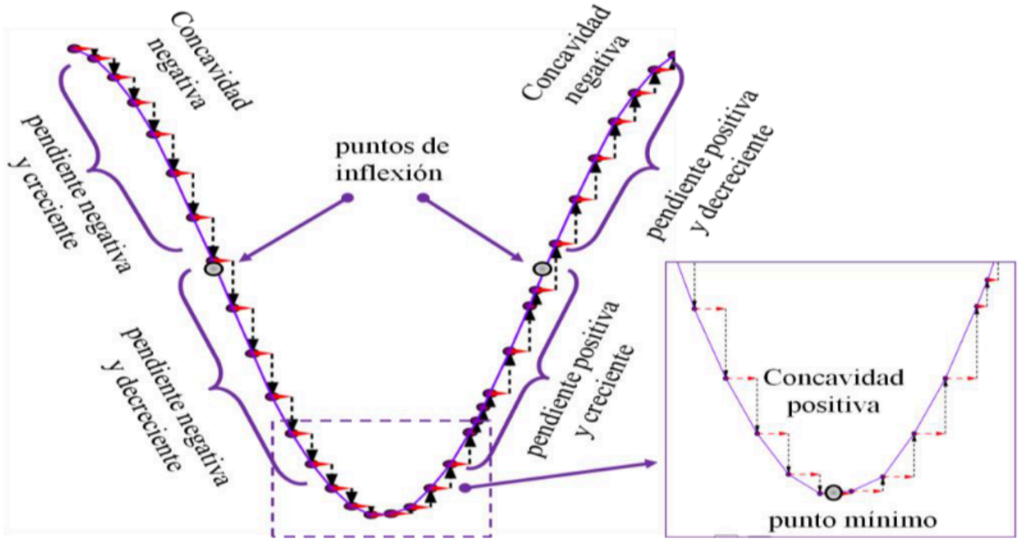

Figura 9. Representación grafica de los cambios promedio, identificación de concavidades y puntos notables.

d) En la forma algebraica: La forma de coordinar el cambio entre las variables, será calculando su razón de cambio promedio (RCP) en un intervalo tomando en cuenta un valor de interés x_0 y el tipo de intervalo a considerar (hacia adelante, atrás o centrado). Un comportamiento importante en esta AM es que el estudiante, mediante el análisis de los resultados de los diferentes cálculos, determine que existe una tendencia hacia un valor numérico específico si se van haciendo dichos cálculos con intervalos de menor magnitud.

$$RCP = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad RCP = \frac{f(xx_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x} \qquad RCP = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$$

e) En el uso del lenguaje: Se espera que el estudiante exprese la relación que existe entre el valor numérico de la razón de cambio promedio y el comportamiento variacional de la magnitud variable:

"La razón de cambio promedio es positiva, entonces la magnitud variable crece"

"La razón de cambio promedio es negativa, podemos decir que la magnitud variable está decreciendo"

"La razón de cambio promedio es cero, entonces la magnitud variable no cambia".

ACCIÓN MENTAL 5 (AM5): Esta actividad mental es alcanzada cuando se logra pasar de la coordinación de la razón de cambio promedio a la razón de cambio instantánea para el continuo de instantes del fenómeno observado. Los comportamientos que se deben observar mostrarán una clara conciencia de que la razón de cambio instantánea dará información clara del comportamiento del fenómeno.

a) En el video: Este tipo de AM ya no se podrá identificar en el video o en alguno de sus fotogramas, ya que no es cuestión visual la identificación de la razón instantánea de cambio (Es una abstracción).

b) En la tabla: El trabajo en tablas puede aproximarnos a una razón de cambio instantánea, cuando surge en el estudiante la inquietud de ver lo que sucede si se trabaja con intervalos más pequeños cada vez, sin embargo no se podrá trabajar con intervalos más pequeños ya que no tendríamos de donde obtener información, y se tendrá que pasar a algún otro registro para continuar el análisis. El comportamiento importante será entonces que el estudiante realice ese paso hacia otro registro y continúe con el objetivo de llegar a la razón de cambio instantánea.

c) En la gráfica: Son deseables comportamientos que indiquen que el estudiante identifica propiedades importantes de la gráfica, relacionándolos con el comportamiento variable de la razón instantánea de cambio, como son puntos extremos, de inflexión, o concavidades. Este comportamiento puede de nueva cuenta necesitar de la verbalización para poder clarificar si las imágenes que el estudiante desarrolló corresponden a esta acción mental.

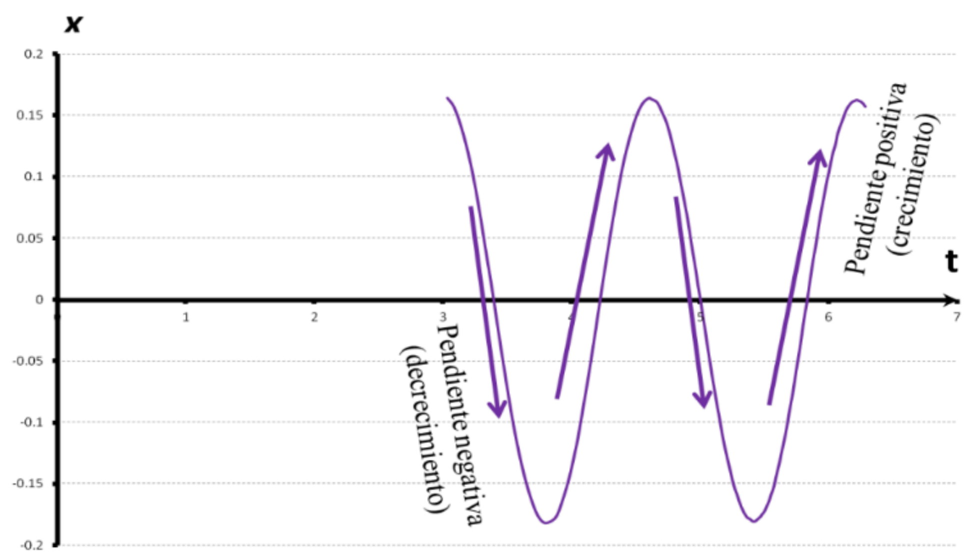

Figura 10. Representación grafica de los cambios, en donde se manifiesta la relación de las variables como la razón de cambio instantánea.

d) En la forma algebraica: Para que un estudiante desarrolle la imagen de razón instantánea (RIC) es necesario considerar que el cambio que sufre la variable independiente es infinitamente pequeño. $\Delta x \to 0$, de nueva cuenta, si tenemos la representación de la función como $y = f(x)$, la razón de cambio instantánea la calcularíamos con $RIC = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, y al igual que en la razón promedio, podemos tener diferentes maneras de realizar dicho cálculo.

$$RIC = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad RIC = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

$$RIC = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x} \qquad RIC = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \delta x \to 0}} \frac{f(x+\Delta x)-f(x-\delta x)}{\Delta x+\delta x}$$

Estos cálculos se apoyan en una interpretación intuitiva de lo infinitamente pequeño y del proceso de paso al límite.

4. NIVELES DE RAZONAMIENTO COVARIACIONAL

Como ya lo mencionamos anteriormente, el marco conceptual presentado por Carlson y colaboradores se basa en estas cinco actividades mentales para hacer una clasificación del grado de desarrollo del pensamiento variacional. Los niveles definidos son cinco.

Estos niveles son progresivos y atienden el carácter dinámico de las acciones mentales, queriendo decir con esto que mientras más alto es el nivel, se espera que el tipo de razonamiento covariacional que se logra vaya siendo más preciso y refinado, resultado de la evolución del razonamiento en el nivel anterior. Lo anterior implica lo que sin duda es una característica en la que ponen especial énfasis los autores: cada nivel de razonamiento sustenta la actividad mental con la que está relacionado directamente, pero a su vez tiene que sustentar todas las actividades mentales que preceden a ella.

5. COMENTARIOS FINALES.

El análisis parcial presentado aquí del marco teórico sobre el razonamiento variacional presentado por Carlson y cols., nos proporciona elementos para evaluar los logros de los estudiantes en la generación de esta nueva forma de pensamiento, necesaria para la comprensión de los procesos y conceptos básicos del Cálculo, específicamente de la derivada. Pero para nosotros también ha sido una gran herramienta en el desarrollo de la investigación, ya que tras este análisis hemos podido establecer los objetivos y criterios con los que se tienen que desarrollar las secuencias didácticas, así como cada una de las actividades a utilizar, para generar el desarrollo del pensamiento variacional en el estudiante.

Nos pareció interesante compartir este análisis, porque al cuestionarnos sobre cada una de los niveles de razonamiento y las acciones mentales que tienen que manifestarse, nos damos cuenta de que no es cosa de desarrollar solo una acción mental más que en el nivel anterior, sino que existe un proceso en donde hay muchos más conocimientos que integrar, ya sea en la conversión o tratamiento en los diferentes registros de representación utilizados, en la tecnología utilizada, y hasta en la metodología utilizada para la enseñanza.

La búsqueda de esos conocimientos y ambientes que nos ayuden a propiciar en el estudiante el desarrollo del Pensamiento variacional, está siendo la guía en esta investigación, de la que esperamos tener oportunidad de compartir con ustedes, la comunidad de Matemática Educativa, en un futuro no muy lejano.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. EMA, 121-156.

Imaz, C. Moreno, L.(2010) Génesis y la enseñanza del calculo, las trampas del rigor. Editorial: TRILLAS

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. Educational Studies in Mathematics, 26(2-3), 229–274.

Thompson, P. W., Byerley, C., & Hatfield, N. (2013). A conceptual approach to calculus made possible by technology. Computers in the Schools, 30, 124-147.