INDAGANDO SOBRE EL LÍMITE DE FUNCIONES DESDE DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTACIÓN

Noelia Londoño Millán, Patricia Del Socorro Narro Ramírez, Alejandra Yatzil Vera
noelialondono@uadec.edu.mx, patricia_narro@uadec.edu.mx, yatzilvera@hotmail.com
Universidad Autónoma de Coahuila. México

Autor de correspondencia: Noelia Londoño Millán

Resumen. En el presente documento se reportan resultados de la fase diagnóstica obtenidos de la ejecución del proyecto de investigación sobre la didáctica del límite y la continuidad de funciones con estudiantes universitarios de varios semestres de dos carreras: licenciatura en matemáticas aplicadas e ingeniería física. El estudio centra la atención en la idea, concepto, desarrollo y uso de los límites desde la teoría de las representaciones, para ello se aplicaron un conjunto de actividades de las cuales se pudieron extraer resultados que muestran varias dificultades, que van desde errores en los procesos algebraicos, dificultades de reconocimiento en el registro gráfico, considerar equivocadamente que límite y el valor funcional siempre coinciden, hasta el desconocimiento del concepto y sus usos, pese a haber cursado y aprobado los cursos de cálculo diferencial, integral y/o vectorial, los cuales incluyen en sus programas por lo menos una unidad que trata sobre este tema.

Palabras clave: Límite, funciones, registros, representación semiótica.

Abstrac. This document reports the results of the diagnostic phase obtained from the execution of the research project on the didactics of the limit and the continuity of functions with university students from several semesters of two careers: degree in applied mathematics and physical engineering. The study focuses on the idea, concept, development and use of limits from the theory of representations, for this a set of activities were applied from which results could be extracted that show various difficulties, ranging from errors in the algebraic processes, recognition difficulties in the graphic register, mistakenly considering which limit and the functional value always coincide, until the concept and its uses are unknown, despite having taken and passed the differential, integral and / or vector calculus courses, the which include in their programs at least one unit that deals with this topic.

Keywords: Limit, functions, registers, semiotic representation.

Introducción

Dentro de lo cotidiano se empieza la enseñanza de límites en el nivel superior trayendo a colación la siguiente expresión: Si $f(x)$ se acerca arbitrariamente a un número L, cuando x tiende a c por cualquiera de sus dos lados, decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es L, y escribimos: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$, precisando que $f(x)$ se acerca arbitrariamente a L, significa que $f(x)$ pertenece al intervalo $(L - \epsilon,\ L + \epsilon)$ a un número L, Larson, Hostetler y Eduards (1998). En esta definición entran en juego varios elementos nuevos para el alumno

Fecha de recepción: 19-102013
Fecha de aceptación:19-12-2013

del nivel medio superior y superior y hasta podría decirse un tanto desconcertantes, por mencionar algunos: el épsilon qué significa, que condiciones debe tener, cuál es la diferencia entre esta notación y la que emplea la palabra bola abierta centrada en L… etc. En un curso tradicional de cálculo, de nivel licenciatura se usa esta definición para demostrar las propiedades de los límites, para resolver problemas y todo se traduce en una simple repetición de algoritmos en los cuales no involucra ni el concepto ni el comprensión de los elementos presentes. En otros casos para resolver problemas de límites se implica la aplicación de procesos algebraicos como multiplicar por el conjugado, o desarrollar algunas factorizaciones para retirar el elemento que genera alguna indeterminación y eso es todo, es decir, no se tiene el concepto de límite, pero se opera en su nombre. En la enseñanza tradicional luego de todo lo anterior se enuncian las propiedades se demuestran algunas de ellas y de eso surgen las siguientes preguntas: ¿logran los estudiantes universitarios la aprehensión conceptual del límite al recibir una clase tradicional? Qué tanto perdura la idea de límite? ¿Identifican las propiedades? ¿Pueden enunciar de forma precisa la definición? ¿Qué tan relacionada esta la idea de límite que se forman los alumnos con lo que significa matemáticamente?

Como puede verse son varios los cuestionamientos que surgen acerca de este tema y aunque el estudio no pretende darle respuesta a todos ellos, si se muestran resultados que permiten visualizar una problemática entorno a límites de funciones, problemática que debe ser conocida por los maestros que imparten las asignaturas de cálculo en bachillerato y nivel superior, para que el estudio de los límites deje de ser una simple tarea algebraica y una colección de errores matemáticos, y se transforme en un conocimiento entendible para los alumnos y útil en procesos que impliquen su uso.

Planteamiento del problema. Consideramos que el tema que se aborda es actual, relevante y puede vincularse de manera directa con el quehacer del docente de matemáticas por lo cual nos propusimos enunciar el problema de investigación de la siguiente forma: ¿Logran obtener los alumnos de matemáticas aplicadas y de ingeniería física el concepto de límite de una función a partir de sus representaciones gráficas y algebraicas? ¿Cuál es la idea que persiste en el alumno sobre el límite una función?

Marco teórico

Para la didáctica de las matemáticas en general, juega un papel crucial el uso de símbolos, signos, gráficas, expresiones algebraicas, figuras geométricas, entre otras. Estos distintos signos y símbolos permiten dos cosas a los actores principales del proceso educativo: para quien enseña tenga elementos o herramientas para explicar un concepto matemático abstracto; y para quien aprende asociar, juntar, convertir, comparar esos elementos para comprender el concepto matemático. Desde esta perspectiva las representaciones semióticas son los medios o vías usados para dar a conocer o para entender un contenido o concepto matemático. Particularmente si se trata del concepto de límite se requiere el uso de estas distintas representaciones que permitan el entendimiento del concepto, como son las gráficas, identificación de los elementos presentes en la definición.

Los objetos matemáticos son intangibles, el límite de una función es un ejemplo de ello, por lo cual se hace necesario usar distintas herramientas para comprenderlos. Desde el punto de vista de Duval (1999) citado por Azcárate y Camacho (2003) los objetos matemáticos no son objetos reales, como los de otras disciplinas. De aquí la necesidad de describir y aprender cómo funcionan ciertos sistemas de representación: representaciones de escritura decimal de los números, representaciones gráficas de formas (funciones o no), representaciones de la escritura literal y algebraica, representaciones que son las figuras en geometría. p. 140.

Cada maestro elige el registro de representación que desea, dando algunas veces privilegios sobre la representación algebraica únicamente, sin ser precisamente esta la más comprensible por los alumnos en consecuencia algunos aspectos del contenido del objeto no aparecen, ocasionando que no se logre la aprehensión conceptual.

Por lo anterior, recurrir a varios registros parece incluso una condición necesaria para no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones y para que se les pueda reconocer en cada una de ellas. Es decir, lo que importa es el objeto representado y no sus diferentes representaciones semióticas posibles.

En este estudio, se utilizó la propuesta de Duval R. "Semiosis y pensamiento humano" (1999) para orientar la investigación. A continuación se muestran algunas definiciones útiles y necesarias para el desarrollo de la investigación.

- *Representación semiótica*. Son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento. Suele considerárseles como un medio de exteriorización de las representaciones mentales para fines de comunicación pero son igualmente esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento ya que juegan un papel primordial en:
- El desarrollo de las representaciones mentales: éste depende de una interiorización de las representaciones semióticas.
- El cumplimiento de diferentes funciones cognitivas: objetivación (expresión privada), comunicación (expresión para otros) y tratamiento.

La producción de conocimientos: el desarrollo de la ciencia está ligado al desarrollo de sistemas semióticos más específicos e independientes del lenguaje natural.

- Semiosis. Aprehensión o producción de una representación semiótica (IME II, Iberoamericana Duval R., p 175).

- Noesis. Aprehensión conceptual de un objeto (IME II p.176).

Es necesario afirmar que la noesis es inseparable de la semiosis. En este sentido, Duval (1999), señala que el aprendizaje de las Matemáticas constituye un campo de estudio ideal para mostrar esta relación, ya que hay tres actividades cognitivas de representación inherentes a la semiosis que son:

- *La formación* de una representación identificable como una representación de un registro dado, esto implica una selección de rasgos y datos en el contenido por representar y se hace en función de las unidades y de las reglas de formación que son propias del registro semiótico en el cual se produce la representación.
- *El tratamiento* de una representación es la transformación de ésta en el registro mismo donde ha sido formada (IME II p. 177).
- *La conversión* de una representación es la transformación a otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial. La conversión es una actividad cognitiva diferente e independiente del tratamiento.

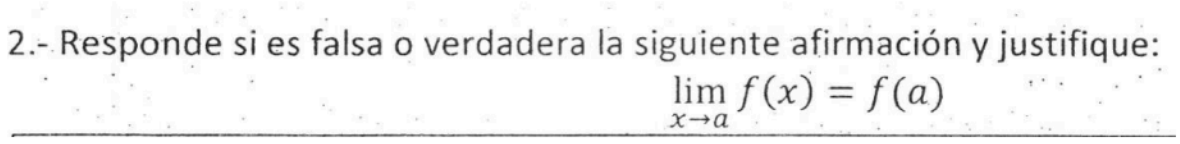
Por tanto se puede afirmar que la conceptualización implica una coordinación de registros de representación, es decir, para el logro de la noesis se requiere además del registro natural (lenguaje verbal) la creación y coordinación de diferentes registros de representación.

Metodología

Sobre los Participantes: Esta investigación contó con la participación de 26 alumnos, cuyas edades se encontraban entre los 18 y 22 años de edad, se seleccionaron alumnos que ya habían aprobado al menos un curso de cálculo diferencial y que pertenecieran a la licenciatura en matemáticas aplicadas y la carrera de ingeniería física de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Coahuila.

Acerca del Instrumento: Para esta etapa del proyecto se diseñaron tres instrumentos, en los cuales el objetivo central fue indagar acerca del nivel de conocimientos sobre el límite de una función desde su definición formal, hasta el concepto del límite de una función a partir de sus representaciones verbal, gráficas y algebraicas.

Teniendo en cuenta lo anterior se diseñaron tres tipos de encuestas las cuales están conformadas por cuatro tipos de representación: la primera categoría consiste en el *lenguaje natural*, esta se divide en tres preguntas, la primera se diseñó con el objeto de conocer si el alumno sabe definir con palabras, de manera formal límite de una función, mientras que la segunda se pretendió analizar qué es lo que entiende el alumno por el límite de una función, es decir, conocer su idea acerca del límite. También se agregó un enunciado con el que se pretende dar cuenta sobre lo que considera el alumno acerca del límite de una función cuando x tienda a a y la imagen de la función en el mismo a.


2.- Responde si es falsa o verdadera la siguiente afirmación y justifique:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Figura 1. Pregunta del diagnóstico que relaciona el límite y el valor funcional

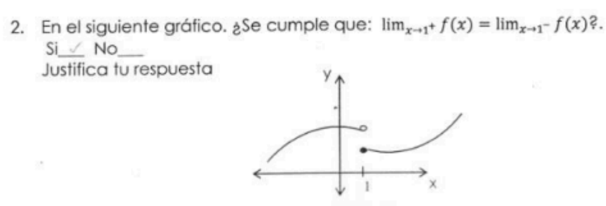
Otras preguntas que se incluyeron en el cuestionario se elaboraron para indagar acerca del límite desde el *registro algebraico*, para ello se pidió a los alumnos resolver varios límites de diferentes tipos de funciones.

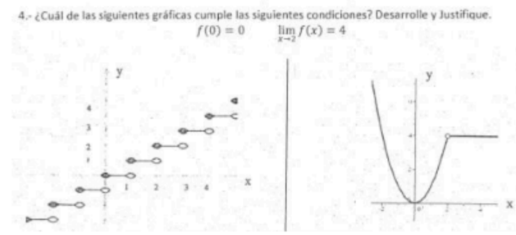
a) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2+2x-15}{x-3}$ b) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n}$ c) $\lim\limits_{n \to \infty} (n+8)$

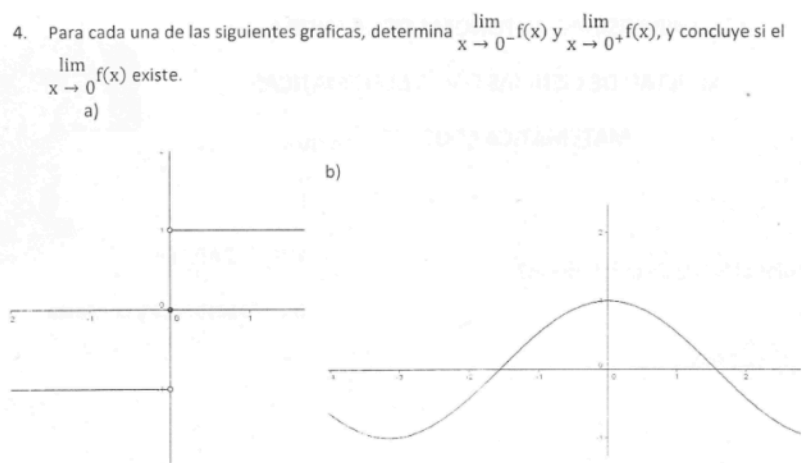
d) $\lim\limits_{n \to \infty} 1^n$ $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 7x + 10}$

Figura 2. Ejercicios sobre límites incluidos en el diagnóstico

Otro apartado del instrumento lo conformaron preguntas que involucraron los registros de *representación gráfica*, la cual incluye tanto funciones continuas como funciones discontinuas. Como se muestra a continuación:







3.- Para cada una de las siguientes gráficas desarrolle el $\lim_{x\to a^+} f(x)$ $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y concluye si el $\lim_{x\to a} f(x)$ existe. Justifique su respuesta.

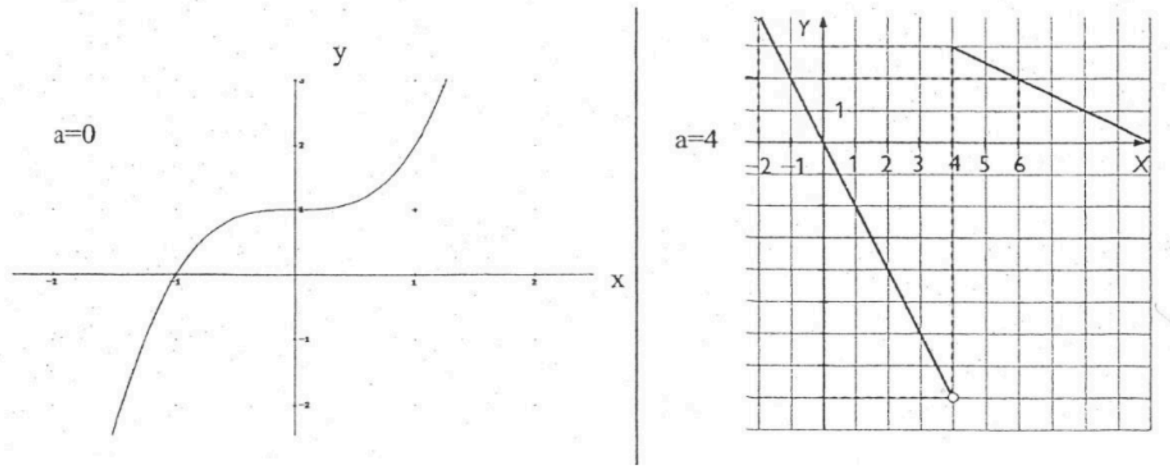


Figura 3. Diferentes tipos de representaciones gráficas incluidos en el diagnóstico.

En el diagnóstico también se incluyó un problema de aplicación a la geometría, el cual tiene como fin observar la capacidad para resolver el problema usando los conocimientos adquiridos sobre el límite y consiste en lo siguiente: dados cuatro polígonos inscritos a una circunferencia de un mismo radio, calcular el límite cuando n tiende a infinito de Ap, siendo Ap el área del polígono y n el número de lados del polígono.

4. En las siguientes figuras aparecen polígonos regulares inscritos en una circunferencia que tiene el mismo radio.
Si n es el número de lados del polígono y A_p es el área del polígono. Calcula:

$$\lim_{n\to\infty} A_p$$

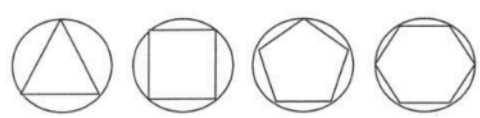


Figura 4. Problema incluido en el diagnóstico

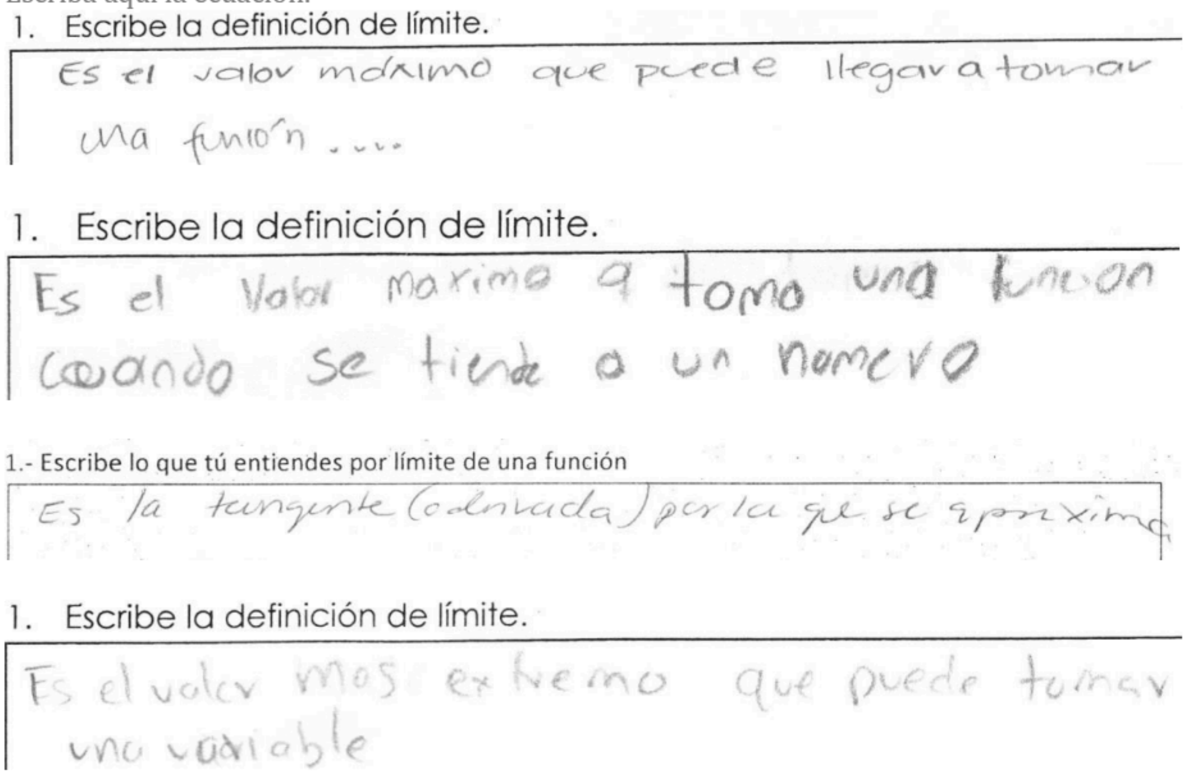
Los instrumentos se aplicaron y fueron respondidos de manera individual, se prohibió el uso de aparatos electrónicos y calculadora graficadora. Los alumnos respondieron en un tiempo máximo de dos horas por cada instrumento.

Resultados

A continuación aparecen los resultados que se obtuvieron luego de la aplicación de los instrumentos, ellos se muestran en gráficas, tablas y se proporcionan algunas evidencias de las respuestas dadas por los alumnos.

Respecto a las preguntas define y escribe lo que entiendes como límite se encontraron en alto porcentaje, términos similares pero un tanto alejados de lo matemáticamente hablando es el límite y su definición, en particular para la definición expresaron algunas ideas sin respetar la formalidad que esta implica, dentro de los términos que usaron los estudiantes se encontraron: valor máximo, valor al que converge la función, punto final, valor extremo, entre otros; ningún estudiante escribió la definición de límite que se usa en los cursos de cálculo diferencial. Al analizar las respuestas obtenidas del enunciado que relaciona el límite de la función con su valor funcional se notó que la mayoría de alumnos consideran verdadera la siguiente expresión: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Este resultado equivocado justifica el proceso que realizan al solucionar límites en el registro algebraico.

Escriba aquí la ecuación.


1. Escribe la definición de límite.

Es el valor máximo que puede llegar a tomar una funión ....

1. Escribe la definición de límite.

Es el Valor maximo q tomo una funcion cuando se tiende a un numero

1.- Escribe lo que tú entiendes por límite de una función

Es la tangente (derivada) por la que se aproxima

1. Escribe la definición de límite.

Es el valor mas extremo que puede tomar una variable

Figura 5. Algunas respuestas de los alumnos entorno a la definición y lo que entienden por límite de una función.

Acerca del registro de representación algebraico. A partir de algunas expresiones algebraicas dadas los alumnos debieron resolver los ejercicios, de los resultados obtenidos se observa que:

Aunque la mayoría los resolvió bien, los principales errores hallados hacen referencia a la limitación que tienen algunos alumnos respecto a los procesos que pueden utilizar, como es el caso del primer ejercicio donde el alumno solamente reemplaza a x por 3 y como obtiene un cero en el denominador y ya no busca otra opción, o aquellos que hacen procesos algebraicos y aritméticos equivocados que los conducen a resultados incongruentes, aunque también puede verse el caso donde los alumnos consideran que el límite de la función $\frac{1}{n}$ cuando n tiende a ∞ no existe. En este tipo de respuestas puede notarse que los alumnos tienden a reemplazar el valor hacia donde tiende x, y en los casos donde ese reemplazo arroja una indeterminación emiten como solución al ejercicio que el límite no existe. Aunque en varios de los ejercicios propuestos los alumnos pudieron hacer uso de la conversión hacia el registro gráfico o hacia el numérico, ninguno opto por esta opción. A continuación, en la figura 30, se muestran ejemplos de lo que se ha expuesto:

3. Resuelve el siguiente límite

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2+7x+10}$$

$$\frac{x^2-x-6}{x^2+7x+10}\left(\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{1+\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2}} \Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2+7x+10}=\lim_{x\to -2}\frac{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{1-\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2}}=\frac{1+\frac{1}{2}-\frac{6}{4}}{1+\frac{7}{2}+\frac{10}{4}}=\frac{1-1}{1+\frac{13}{2}}$$

$$=0.$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x-1-\frac{6}{x}}{x+7+\frac{10}{x}}=\lim_{x\to -2}\frac{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{1-\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2}}=\frac{1+\frac{1}{2}-\frac{6}{4}}{1+\frac{7}{2}+\frac{10}{4}}=0$$

5. Calcula cada uno de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3^2+2(3)-15}{3-3}=\nexists$

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\nexists$

5. Calcula cada uno de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x-3}=\frac{3^2+2(3)-15}{3-3}=\nexists$

b) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 7$

Figura 6. Diferentes soluciones a los ejercicios de límites.

Identificación de límites de funciones desde el registro gráfico. En cuanto a la visualización de límites de funciones a partir de su representación gráfica se notó que el 41% responden de manera acertada cuando la imagen proporcionada corresponde a una función continua, dentro de las respuestas equivocadas se nota la dificultad para identificar el límite de la función, más hasta se puede afirmar que no tienen la idea de límite en este registro. En la figura 7, Se ha expuesto el caso donde del alumno asegura que el límite por la derecha no existe, y afirma que el límite por la izquierda puede existir. Otros simplemente expresan abiertamente "no recuerdo bien".

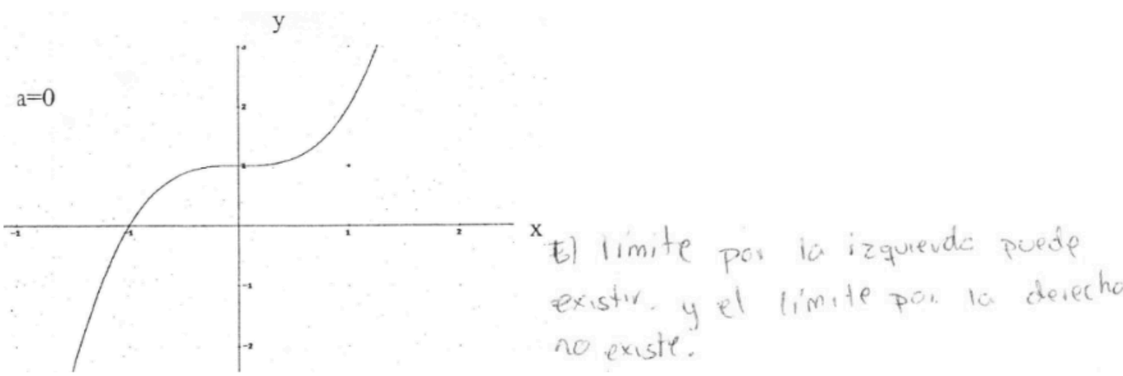


Figura 7. Respuesta de un alumno sobre el límite de la función continua.

Los resultados obtenidos respecto al límite de funciones discontinuas desde el registro gráfico, muestran otro tipo de dificultades por tal motivo se hará mención de manera independiente. Para empezar veamos la función donde aparecen dos rectas de pendientes negativas pero de diferente ecuación:

En principio el alumno se ocupa de hallar la ecuación de una de las rectas ($y = 2x$) y luego calcula el límite, y obtiene 8 y -8, olvidando que las rectas no tienen la misma ecuación, lo que lo conduce a una respuesta equivocada, aunque conoce el teorema de la unicidad del límite de una función. En este caso el alumno consideró pertinente hacer una conversión del registro gráfico al registro algebraico, porque conoce y aplica correctamente los límites laterales, sin embargo su dificultad la tuvo para hallar la ecuación de una de las rectas.

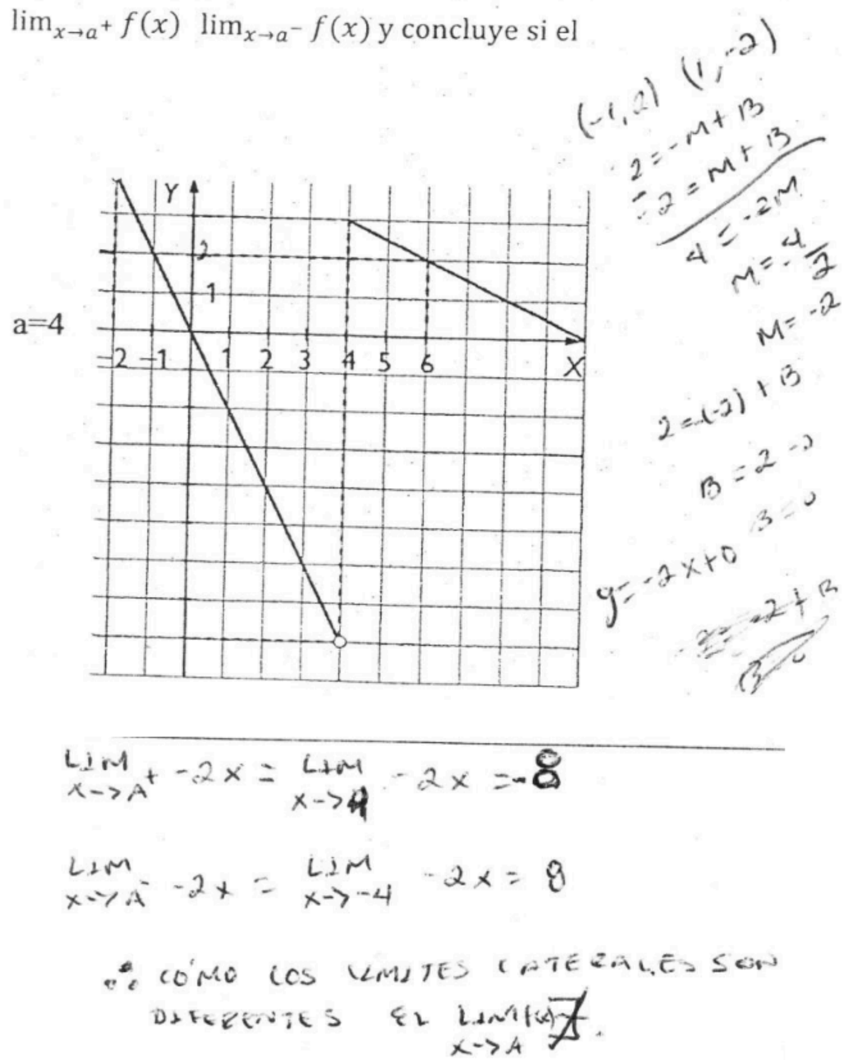


Figura 9. Error al hallar las ecuaciones de las rectas (proceso de conversión)

También hubo alumnos que no logran identificar que el límite de la función representada por las rectas no existe, y afirman lo contrario, como se muestra en el siguiente ejemplo:

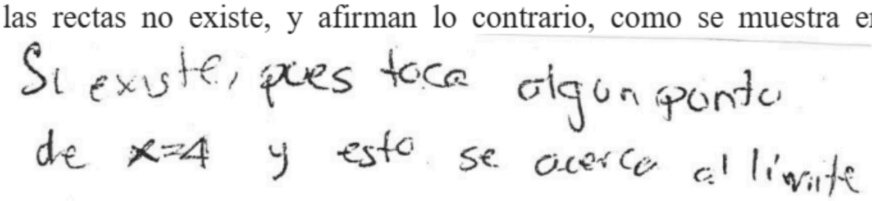


Figura 8. Respuesta del límite en las dos rectas de pendiente diferente

Esta afirmación pone de manifiesto el desconocimiento por parte del alumno sobre el concepto de límite, los procesos que se siguen para calcularlos y su significado.

En el ejemplo siguiente que también corresponde a límite de funciones discontinuas se observa que el alumno tiene confusión (dislexia) entre el límite por la derecha y el límite por la izquierda, veamos el ejemplo:

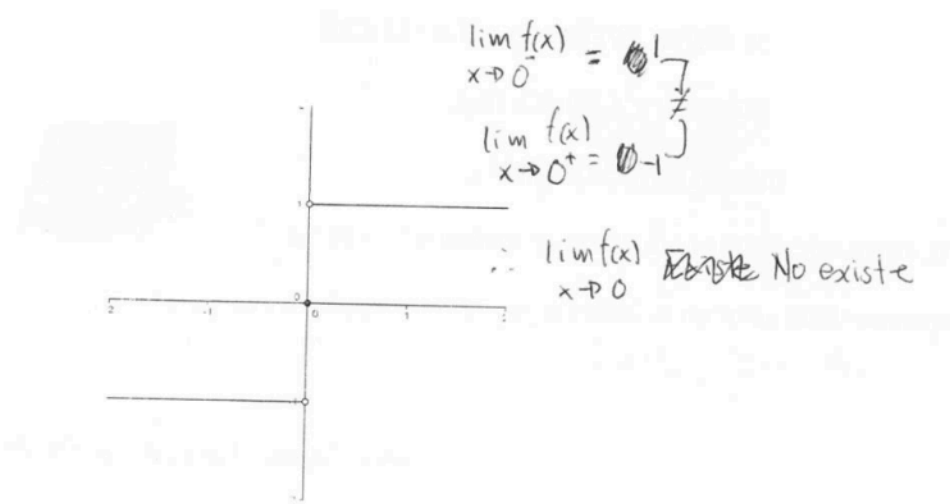
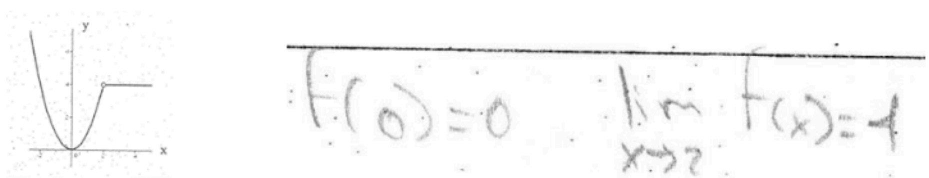


Figura 10. Dificultad al calcular el límite de la función (dislexia)

Un caso muy particular es esta respuesta dada por un alumno que responde la parte inicial de manera correcta lo que se pregunta, aunque no explica como obtiene el límite de la función pero una cosa digna de notarse es su conclusión "es continua", aun y cuando la gráfica dada si tiene los límites que se piden pero presenta una discontinuidad en $x = 2$, ya que $f(2)$ no está definido.



Y expresa luego:

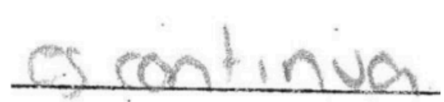


Figura 11. Respuesta parcialmente correcta

Aunque no se preguntaba por la continuidad, y los elementos que se pedían revisar no eran para concluirla, erróneamente el alumno responde que es continua.

En este estudio no todo es desalentador, también encontramos algunas respuestas que muestran el dominio del conocimiento por parte de los alumnos, sin embargo de esos casos encontramos muy pocos. Un ejemplo de respuesta correcta es la que aparece a continuación ver figura 12. En ella se puede ver que el alumno responde de manera correcta, analizan la información proporcionada y concluye de manera coherente.

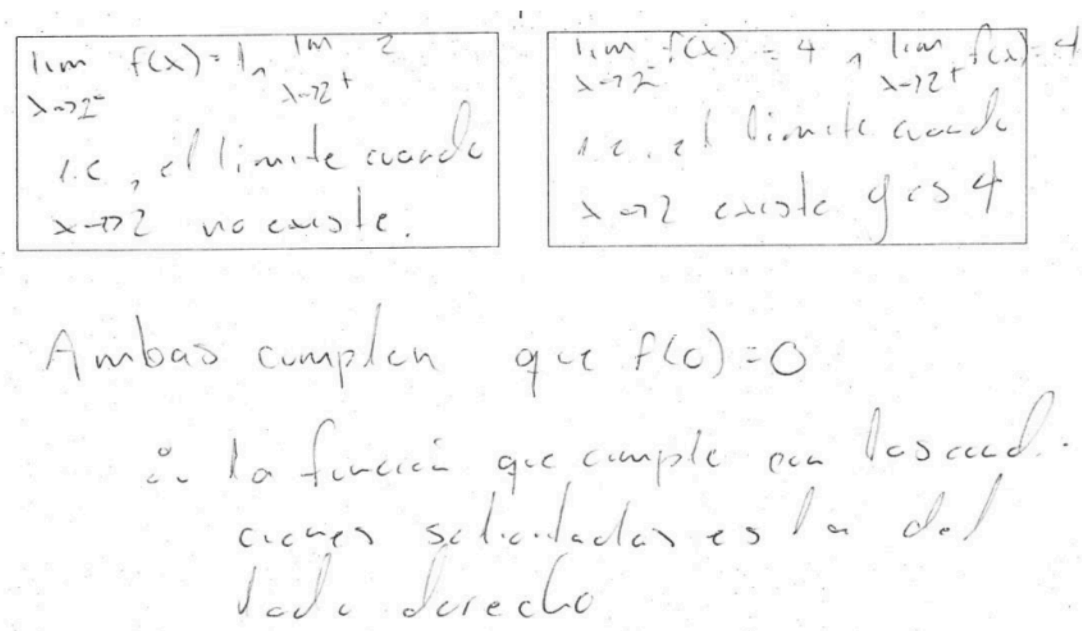


Figura 12. Respuesta correcta, analizando cada caso de manera coherente

Analizando el hecho que: tener dominio de un concepto es identificarlo desde su distintos registro de representación y poderlo usar en la solución de problemas, puede decirse que los alumnos participantes en el estudio no tienen claro el concepto de límite de funciones, ya que a partir de los resultados se observa un mejor desempeño de los alumnos en lo que respecta al registro algebraico. Persisten ideas erróneas e intuitivas de límites pese a ser estudiantes de dos carreras de ciencias exactas.

Los resultados cuantitativos corroboran lo anterior. Enseguida se muestra los resultados cuantitativos en términos de porcentajes y clasificados en tres registros como son el lenguaje natural, algebraico y la representación gráfica, ver tabla 1.

Tabla 1. Resumen de los resultados cuantitativos sobre límites en registros de representación

		Aciertos	Equivocaciones	Sin respuesta
	Definición	0%	93%	7%

Registro en lenguaje natural	Idea	75%	25%	0%
Registro en lenguaje algebraico	Límites funciones discontinuas	88%	12%	0%
	indeterminados	34%	35%	8%
Registro gráfico	Funciones continuas	41%	59%	0%
	Funciones discontinuas	69%	29%	2%

Dos aspectos adicionales que se consideraron y exploraron dentro del diagnóstico sobre límites de funciones hacen alusión a las propiedades de los límites y la resolución de un problema de aplicación. Los resultados que se obtuvieron a este respecto se muestran en la tabla 2.

Tabla 2. Resultados acerca de las propiedades y solución de un problema de límites

	Aciertos	Equivocaciones	Sin respuesta
Propiedades de los límites	8%	81%	11%
Resolución de un problema de aplicación	50%	42%	8%

En esta tabla puede verse que el dominio de las propiedades de los límites es casi nulo, ya que el 92% de los participantes en estudio se equivocan al enunciarlas o no contestan esta pregunta, los que contestan correctamente se refieren a los límites laterales, también incluyen el límite de una suma de funciones. Pero quienes se equivocan expresan una serie de cuestiones incoherentes difíciles de categorizar, algunas de esas respuestas se anexan en la figura 13.

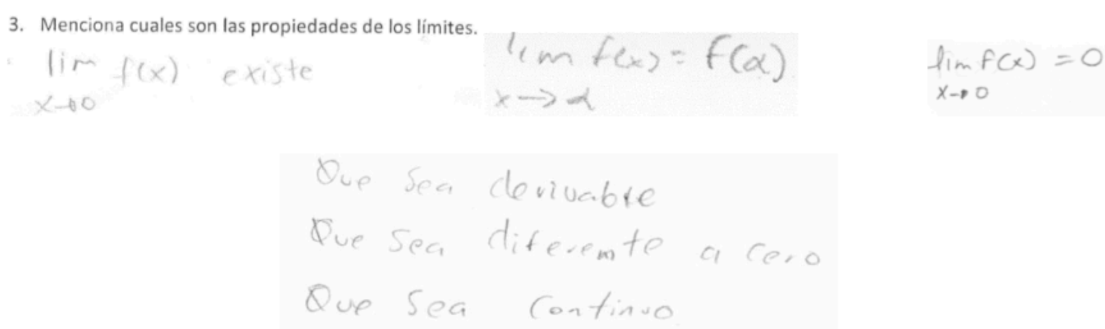
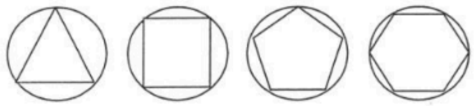


Figura 13. Diferentes respuestas sobre las propiedades de los límites

En cuanto a la resolución del problema planteado, debemos decir que con los elementos proporcionados en el enunciado, particularmente la gráfica, se inducía a la solución aun y cuando el alumno no conociera el tema de límites de funciones.

4. En las siguientes figuras aparecen polígonos regulares inscritos en una circunferencia que tiene el mismo radio.
Si n es el número de lados del polígono y A_p es el área del polígono. Calcula:
$$\lim_{n\to\infty} A_p$$



Sin embargo solo la mitad respondieron de manera acertada. Como ejemplo de las equivocaciones de los alumnos tenemos la figura 14, la cual el alumno va reemplazando en el límite a n por 3, 4, 5 y 6, es decir, va reemplazando por el número de lados y elige la función área de un polígono regular ($\frac{p*a}{2}$) perímetro por apotema entre dos, para calcular el límite, este proceso no lo conduce a obtener ninguna solución. Es más muestra un error enorme y es precisamente escribir 3→ ∞, 4→ ∞, 5→ ∞, 6→ ∞ .

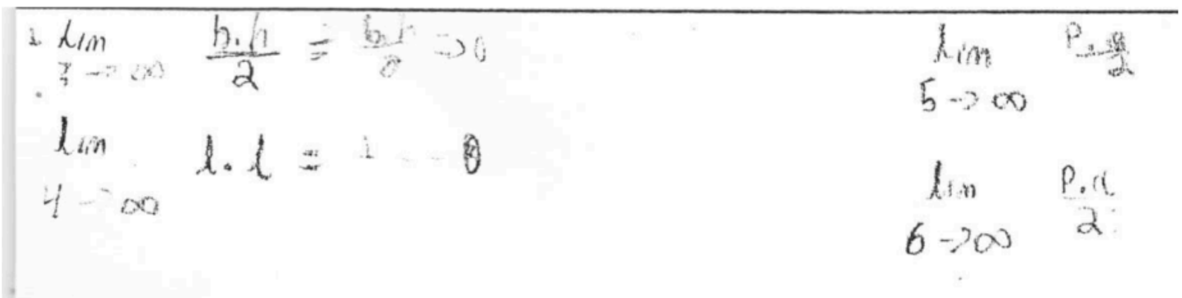


Figura 14. Proceso seguido por un alumno para solucionar el $\underset{n\to\infty}{lím}\ AP$

CONCLUSIONES:

Los resultados de esta fase diagnóstica muestran que pese a que los alumnos han cursado y aprobado la asignatura que incluye el tema de límites, la definición aún no está presente en el lenguaje de los alumnos, se nota que tienen una idea equivocada y rudimentaria, porque todavía emplean términos para la definición que no corresponden. Aunque la mayoría es capaz de identificar los límites laterales correctamente, en las gráficas, no concluye acertadamente la existencia o no del límite; la mayor habilidad se ve reflejada al calcular los límites desde el registro algebraico, pero hay quienes confunden procesos y realizan equivocadamente la factorización de las expresiones involucradas. En términos generales del estudio se deduce:

- Todos los alumnos conocen el método del cálculo de límites laterales de funciones (por la izquierda y por la derecha), e incluso hasta aquellos que contestan mal.
- Todos los alumnos conocen el teorema de la unicidad “Si el límite de una función existe, es único” y lo aplican, sus mayores dificultades están en la realización de los procesos de tratamiento, los cuales son equivocados.
- De los resultados obtenidos se entresaca que los alumnos no logran la aprehensión del concepto de límite, solamente acercamientos a él a través del registro algebraico.

- Son pocos los alumnos que utilizan la conversión entre registros de representación semiótica para obtener los límites de funciones.
- Había casos en los cuales el alumno podía realizar conversión entre los diferentes registros de representación, solo uno hizo el intento pero no logró llegar a un resultado satisfactorio, es decir no logró encontrar las ecuaciones de las dos rectas que se presentaban en el problema. (figura 9).
- Las ideas que tienen los alumnos acerca de los límites son más aproximadas que la su definición.
- Identifican los límites de la funcione discontinuas más que las continuas, desde el registro gráfico.
- La mayoría de los alumnos no estuvieron de capacidad de identificar las propiedades de los límites, quienes sí lo hicieron, expresan solo dos propiedades.

SUGERENCIAS

Luego del diagnóstico sobre límites el grupo de trabajo continuará dándole seguimiento a la investigación en lo que respecta a la continuidad de funciones. Por lo pronto consideramos pertinente hacer el siguiente conjunto de sugerencias que podría facilitar el dominio del tema de límites en futuras generaciones:

Para darle sentido la definición conviene usar una representación gráfica donde se visualice la definición que se quiere mostrar, dejando clarificados todos los términos que se involucran, como se expresa en el ejemplo

Incluir el uso de tecnología computacional en el cual se pueda visualizar los diferentes casos y tipos de funciones, haciendo énfasis en aquellos donde se pueda generar conflicto como es en la función $\frac{1}{n}$, funciones definidas por tramos, etc.

Al inicio del curso indagar sobre las ideas intuitivas que tienen los alumnos sobre límites, permitirles que las expresen aunque estén equivocadas y al final discutir respetuosamente y dar elementos convincentes sobre los errores.

Usar distintos registros de representación semiótica para explicar límites de funciones, especialmente el registro numérico, el gráfico y por supuesto el algebraico.

Bibliografía

Azcárate y Camacho (2003). *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, No. 2. Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Traducción Miriam Vega Restrepo. Artes gráficas Univalle. Colombia.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Science Cognitives 5(1993) 37-65. Traducción:

Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En *Investigaciones en Matemática Educativa II.* (Editor F. Hitt). Grupo Editorial Iberoamérica.

Gerald, L. Bradley, K. (1998). *Cálculo de una variable*. Madrid: Prentice Hill.

González, F. (2005). *Algunas cuestiones básicas acerca de la enseñanza de conceptos matemáticos. Fundamentos en Humanidades*. Universidad de San Luis. Argentina.

Heyd, D. (1998). *Guía de Cálculo.* Mc Graw- Hill

Hitt. F. (2001). Construcción de conceptos matemáticos y de estructuras cognitivas. Memorias de la XI Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas. Universidad de Sonora. México

Larson, R. Hostetler, R. Eduards, B. (1998). *Cálculo y geometría analítica.* México: Mc Graw- Hill.

Pita, C. (1998). *Cálculo de una variable.* México: Prentice Hall Hispanoamericana, S. A.

Spivak, M. (1990). *Calculus: calculo infinitesimal*. New York: Reverté.

Zill, D. (2001). *Cálculo con Geometría Analítica.* Grupo editorial Iberoamericana.