USO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL PARA MODELAR CRECIMIENTO MICROBIANO

Isabel Dorado Auz, José Luis Díaz Gómez
auz3@correom.uson.mx, jdiaz@gauss.mat.uson.mx

Universidad de Sonora. (México)

Autor de correspondencia. Isabel Dorado Auz

Resumen. Este trabajo trata sobre la introducción de la función exponencial en el primer curso de Cálculo de la carrera de Químico Biólogo Clínico en la Universidad de Sonora, como herramienta matemática para desarrollar un proceso de modelización en la enseñanza de un tópico de esta asignatura. Se usó un dispositivo didáctico llamado Recorrido de Estudio e Investigación como la organización didáctica "ideal" para integrar la modelización matemática en el curso de Cálculo. El trabajo consistió en la implementación de éste dispositivo, tomando como base un problema de la vida real, el crecimiento bacteriano, como vía para contribuir al desarrollo de las habilidades de los estudiantes en la solución de problemas en la vida fuera del aula.

Palabras claves: Modelización, recorrido de estudio e investigación, función exponencial

Abstrac. This paper deals with the introduction of the exponential function in the first Calculus course of the Clinical Biologist Chemist at the University of Sonora, as a mathematical tool to develop a modeling process in the teaching of a topic of this subject. A didactic device called the Study and Research Tour was used as the "ideal" didactic organization to integrate mathematical modeling into the Calculus course. The work consisted in the implementation of this device, based on a real-life problem, bacterial growth, as a way to contribute to the development of students' abilities to solve problems in life outside the classroom.

Keyword: Modeling, study and research path, exponential function

Introducción

Muchos enfoques en Matemática Educativa promueven la necesidad de enseñar las matemáticas como una herramienta de modelización, especialmente de cuestiones o situaciones que surgen fuera del ámbito de las matemáticas. Se piensa que la modelización puede convertirse en una herramienta potente para el estudio escolar de las matemáticas, acompañada de una renovación general de los instrumentos del trabajo matemático con ayuda de las nuevas tecnologías de la información.

De hecho, el enorme potencial de la función exponencial para modelar diversos fenómenos de las ciencias experimentales (que incluyen crecimiento poblacional, desarrollo de poblaciones, decaimiento radiactivo, etc.) puede ser aprovechado para diseñar procesos

Fecha de recepción: 17-10-2013
Fecha de aceptación: 01-01-2014

didácticos que permitan mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por tal motivo, el presente trabajo busca propiciar la utilización de modelos matemáticos en situaciones prácticas del área de Químico Biológicas para promover el desarrollo de las habilidades de los estudiantes en la solución de problemas en la vida fuera del aula.

Se trata, pues, de fomentar en los alumnos: la capacidad para analizar una situación problemática en términos de dependencia entre magnitudes variables; que puedan manejar la información pertinente para iniciar un proceso de modelización matemática que permita solucionar un problema planteado; descubran el potencial de la función exponencial para modelar el fenómeno; y, mediante diversos modelos matemáticos generen nuevos cuestionamientos sobre las situaciones problemáticas consideradas.

Para lograr lo anterior, se diseñó un nuevo dispositivo didáctico, llamado Recorrido de Estudio e Investigación (REI), que surge desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico, para emplear el enorme potencial de la función exponencial como modelo matemático (TAD) para resolver, en este caso, problemas relacionados con el crecimiento de la *Escherichia coli* así como el combate a una posible infección. Se busca que los estudiantes, mediante la modelización matemática, puedan crear conexiones entre las diferentes piezas de conocimiento y desarrollar lo que se considera tradicionalmente como el "conocimiento metacognitivo".

La problemática

La "enseñanza tradicional" de las matemáticas en las ciencias experimentales, se puede resumir, según Baquero, Bosch y Gascón (2011), en un proceso que consta de dos etapas. Primero, se enseñan unos conocimientos elementales que se proporcionan a los estudiantes como instrumentos "ya construidos" sin especificar con claridad ni su origen, ni su razón de ser, ni su ámbito de aplicación. Posteriormente, los estudiantes deben aprender a utilizar o, mejor, a "aplicar" estos conocimientos elementales y generales a las situaciones problemáticas prototípicas con las que se encontrarán en su especialidad científica. Comúnmente, se relega a un segundo plano, si no desaparece totalmente, el proceso de matematización de las cuestiones que se plantean en los diferentes ámbitos científicos, "desarraigando" así las matemáticas de las demás disciplinas y de los problemas extramatemáticos que aportan sus razones de ser a muchas de las construcciones matemáticas enseñadas (Barquero et al, 2011).

Por lo tanto, la enseñanza tradicional universitaria crea serias dificultades ligadas a la pérdida de sentido y la consiguiente desarticulación de los contenidos matemáticos escolares, lo que constituye hoy uno de los principales problemas en todos los niveles educativos. En este contexto, el problema didáctico que planteamos se puede formular a través de las siguientes preguntas de investigación:

¿Cómo diseñar procesos didácticos apropiados para introducir el concepto de función exponencial en el primer curso de Cálculo de la carrera de Químico-Biólogo Clínico?

¿Cómo elaborar cuestiones que sean generadoras de los contenidos matemáticos que se enseñan y, en consecuencia, permitan articularlos y mostrar su funcionalidad?

Antecedentes

Desde finales del siglo pasado e inicios del presente siglo, un gran número de universidades modificaron sustancialmente sus planes y programas de estudio y la Universidad de Sonora no fue la excepción. Esto se da, como producto de la Conferencia Mundial sobre la Educación Superior, convocada por la UNESCO en 1998, que reunió a representantes de más de 100 países. Esta conferencia en su Declaración Mundial sobre la Educación Superior, nos informaba que, dada la expansión espectacular que sufrió la educación superior en la segunda mitad del siglo XX, se hacía necesaria una profunda reforma de la educación superior, donde se incluyeran métodos educativos innovadores y se fomentara el pensamiento crítico y la creatividad.

La Universidad de Sonora, acorde a los nuevos planteamientos, modificó sus Lineamientos Generales para un Nuevo Modelo Curricular, lo que motivó una serie de cambios, cuyos propósitos eran impulsar un cambio radical en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Se planteó como necesario que:

> "se impulse la participación de los alumnos, en contraposición a aquel proceso en el que el profesor imparte la enseñanza y el estudiante se limita a ser receptor de sus exposiciones" (Marco Normativo, 2012).

Algo así como regresar a los orígenes, en el caso del cálculo, tal y como lo plantearon Courant y Robbins (1996), quienes nos dicen que durante el siglo XVII y gran parte del siglo XVIII, en el análisis matemático, el ideal griego de razonamiento claro y riguroso parecía haber sido descartado. La "intuición" y el "instinto" de un pequeño grupo de hombres extremadamente competentes reemplazaban a la razón en muchos aspectos. Por ello, se pensaba, que una presentación clara de los resultados del cálculo no solo era innecesaria sino imposible.

En 1995, Michelle Artigue, nos decía que la enseñanza tradicional del cálculo y específicamente la enseñanza universitaria tienden a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica y se evalúan, en esencia, las competencias adquiridas en este dominio. Por lo cual, se desarrollaron investigaciones didácticas centradas en el campo conceptual del cálculo y generaron proyectos de innovación de la enseñanza, lo cual incluye el uso de las nuevas tecnologías. Sin embargo, ambos esfuerzos tomaron rumbos distintos y están lejos de establecer vínculos estrechos.

La modelización

Desde los años setenta del siglo pasado se pensó que la modelización matemática sería una solución para modificar los procesos de enseñanza y aprendizaje retomando la resolución de problemas como herramienta y motivo para enseñar y entender mejor las matemáticas. Esto se hizo por dos vías: la resolución de problemas, donde se ponía atención al uso de estrategias heurísticas para resolver problemas matemáticos puros y la modelización matemática y sus aplicaciones, para resolver un tipo particular de problemas generados en situaciones del mundo real (Voskoglou y Phil, 2011).

Sin embargo, Hein y Beimbengutt (2006) señalan que la principal dificultad que presenta la modelización está centrada en la formación de los profesores y en la falta de vivencia del alumno en un trabajo de esta naturaleza. Además, Barquero, Bosch, y Gascón (2010) reconocen que la modelización matemática permanece como una aspiración utópica, ya que raras veces se implementa en las aulas, aunque algunas carreras de ingeniería han retomado este camino y los autores sugieren que la modelización debiera extenderse, también, a las ciencias experimentales.

La función exponencial

En general, los libros de texto nos dicen que una función exponencial es una función de la forma $f(x) = ab^x$, donde: *a* representa el valor de $f(x)$ cuando $x = 0$, también llamado valor inicial, y *b* es la base de la exponencial y representa el factor de crecimiento de la función. Tanto ***a*** como ***b*** son números más grandes que cero y ***b*** no puede ser igual a 1. Un tipo especial de función exponencial, muy común en las ciencias experimentales, se denota por la expresión $f(x) = A_0 e^{kx}$, donde: A_0 representa el valor inicial, *e* es la constante de Euler, *k* es la tasa relativa de cambio.

En una función exponencial la variable independiente es el exponente de la función y, por su propia definición, el dominio de toda función exponencial es el conjunto de los números reales. Aunque, en muchos casos, la variable independiente solo toma valores positivos cuando se modelan fenómenos del mundo real, por ejemplo, el crecimiento microbiano.

Si $0 < b < 1$, entonces $f(x) = ab^x$ es *decreciente*, puesto que la base es una fracción positiva o decimal menor que 1. Luego si el exponente aumenta, entonces el valor de b^x disminuye.

Si $b > 1$ entonces $f(x) = ab^x$ es *creciente*, puesto que la base es un número positivo mayor que 1. Luego, si el exponente aumenta, entonces el valor de b^x también aumenta.
Los valores de la variable dependiente son siempre positivos, por tanto: la función siempre toma valores positivos para cualquier valor de x, es decir el codominio son los reales positivos. Se acerca al eje *X* tanto como se desee, sin llegar a cortarlo, hacia la derecha en el caso en que $\boldsymbol{0 < a < 1}$ y hacia la izquierda en caso de $\boldsymbol{a>1}$, se dice por ello que el eje x es una asíntota horizontal.

La modelización dentro de la Teoría antropológica de lo didáctico

García (2011), nos dice que los procesos de modelización matemática han ocupado, durante los últimos años, un papel central en la investigación en educación matemática desde una faceta dual: como herramienta didáctica para la enseñanza de las matemáticas y como objeto de enseñanza-aprendizaje. La TAD describe los "procesos de modelización" como procesos de reconstrucción y articulación de Organizaciones Matemáticas (OM), de complejidad creciente (puntuales→locales→regionales), los cuales deben comenzar a generarse a partir del cuestionamiento sobre las *razones de ser* de las OMs que se desean reconstruir y articular.

Una OM es puntual si está generada por un único tipo de tareas. Una Praxeología matemática es local (en adelante, OML) en una institución si se obtiene como resultado de la integración de diversas Praxeologías puntuales. Cada OML está caracterizada por una tecnología, que sirve para justificar, explicar, relacionar entre sí y producir las técnicas de todas las OML que la integran. Finalmente, una OM es regional en una institución si se obtiene mediante la coordinación, articulación y posterior integración, alrededor de una teoría matemática común, de diversas OML.

La función exponencial como modelo matemático

Lo y Kratky (2011) nos dicen que los estudiantes frecuentemente tienen dificultades para determinar si una situación de la vida real se modela mejor con una relación funcional lineal o una exponencial. El motivo de esta dificultad, afirman, es la carencia de un conocimiento profundo acerca de la tasa de cambio, la cual es constante en una función lineal, mientras que en la función exponencial $f(x) = ab^x$, la tasa incrementa cuando b>1 y decrece cuando b<1, para permanecer constante cuando b=1.

Para evitar confusiones, Confrey y Smith (1994) nos sugieren recurrir a las unidades aditivas y multiplicativas para establecer una diferencia más tajante. Además, para el estudio de la función exponencial se requerirá que otros significados sean retomados o generados: razón de cambio, covariación y crecimiento (Vargas, 2011).

2.3 La Teoría antropológica de lo didáctico (TAD)

En lo subsecuente, se presentarán algunos elementos de esta teoría, haciendo énfasis en un dispositivo didáctico, llamado Recorrido de Estudio e Investigación, que representa la materialización de lo que la TAD considera como procesos didácticos basados en una enseñanza «funcional» de las matemáticas. El REI, sitúa la actividad matemática en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales. Se admite, en efecto, que *toda* actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo *único*, que se resume en esta teoría con la palabra de *praxeología* (Chevallard, 1999).

Toda actividad matemática institucional puede modelizarse mediante la noción de praxeología (organización) matemática. En las praxeologías es posible distinguir dos componentes principales, interrelacionados: la **praxis o parte práctica** (los tipos de tarea y las técnicas utilizadas), y el **logos o razonamiento humano** (la tecnología, discurso racional que justifica la pertinencia de la tarea concreta, y la teoría, que justifica la producción de la tecnología). El sistema formado por estos dos bloques, o cuatro componentes, constituye una organización matemática (OM).

Todo proceso de estudio de las matemáticas como proceso de construcción o reconstrucción de OM, consiste en la utilización de una determinada Organización Didáctica (OD), con su componente práctico (formado por tipos de tareas y técnicas didácticas) y su componente teórico (formado por tecnologías y teorías didácticas). En la historia de las instituciones sociales no hay productos sin procesos y, por lo tanto, lo que se analiza son procesos didácticos cuya unidad mínima de análisis son las praxeologías didácticas (relativas a ciertas praxeologías matemáticas).

El recorrido de Estudio e Investigación

El REI permite articular secuencias de enseñanza y aprendizaje que se pueden trasladar al aula. Este dispositivo consta de los siguientes elementos (Fonseca 2011):

1. Un ***problema didáctico-matemático*** al que el sistema de enseñanza tiene que dar respuesta.
2. Una ***institución*** concreta en la cual se plantea el problema en cuestión.
3. Una ***razón de ser*** de una organización matemática a las cuestiones, inicialmente problemáticas.
4. Una ***cuestión generatriz*** fecunda y capaz de generar una actividad matemática de complejidad creciente y que obligue al alumno a un cierto compromiso personal en su resolución.
5. Un ***nuevo Contrato didáctico***. El modelo que se propone rompe con el contrato didáctico tradicional en el que primero aparece la teoría y después problemas preparados y cerrados para resolver con la teoría dada.

6. El ***Proceso de estudio***, cuyo objetivo será aportar respuestas a la cuestión generatriz, dando lugar a un proyecto en el que figuran múltiples cuestiones derivadas que van a provocar la construcción de una *Organización Matemática Local Relativamente Completa* (OMLRC).

2.5 La construcción del REI

Fonseca (2011), nos dice que el proceso de construcción de la actividad matemática, es un proceso de ingeniería didáctica y viene articulado alrededor de ocho momentos didácticos, *Organizaciones Didácticas* (OD):

OD1. Inicial de equipamiento praxeológico, donde se habla de la mínima infraestructura praxeológica necesaria para comenzar a estudiar la nueva organización matemática;
OD2. Primer encuentro, donde el alumno se encuentra con un primer tipo de tareas;
OD3. Exploratorio, posibilidad de explorar una técnica potencialmente útil para resolver las tareas;
OD4. Trabajo de la técnica, debe provocar un desarrollo progresivo de la técnica;
OD5. Tecnológico-teórico, necesidad de crear un marco tecnológico teórico que permita construir, justificar, interpretar y relacionar todas las técnicas;
OD6. Institucional, debe precisarse lo que es "exactamente" la organización matemática elaborada;
*OD7. Momento de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC), cuyo uso s*implifica, completa y extiende el proceso de estudio;
OD8. Momento de la evaluación, es preciso evaluar la calidad de los componentes de la organización matemática construida, analizando no sólo las responsabilidades del profesor y los alumnos en el REI, sino también la actividad matemática desarrollada.

La noción de Momento Didáctico se utiliza, no tanto en el sentido cronológico, como en el sentido de dimensión de la actividad. Lo importante es la estructura interna de las relaciones que deben establecerse forzosamente entre momentos del proceso de estudio.

La construcción de la organización matemática genera un producto que es un proceso de ingeniería matemática. Para medir su grado de completitud, se pueden utilizar los siguientes indicadores (Fonseca, 2011):

OML1. Deben aparecer tipos de tareas asociados al "cuestionamiento tecnológico". Tareas que hagan referencia a la interpretación, la justificación, la fiabilidad, la economía y el alcance de las técnicas, así como a la comparación entre ellas.
OML2. Existencia de diferentes técnicas para cada tipo de tareas y de criterios para elegir entre ellas.
OML3. Existencia de diferentes representaciones de la actividad matemática.
OML4. Existencia de tareas y de técnicas "inversas".
OML5. Interpretación del funcionamiento y del resultado de la aplicación de las técnicas.
OML6. Existencia de tareas matemáticas "abiertas".
OML7. Necesidad de construir técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas.
OML8. Debe existir la posibilidad de perturbar la situación inicial.

La noción de "completitud" es relativa, ya que existen Organizaciones Matemáticas más o menos "completas" que otras en función del grado en que sus componentes cumplen las condiciones descritas por los indicadores OML1-OML8.

Trabajo experimental

Se implementó un recorrido de estudio e investigación que tomó como base un problema de la vida real, el crecimiento bacteriano, propio del área de Químico Biológicas, como vía para contribuir al desarrollo de las habilidades de los estudiantes en la solución de problemas en la vida fuera del aula. Se desarrolló con alumnos del curso Introducción al Cálculo Diferencial e Integral de la Carrera de Químico-Biólogo, en el Departamento de Ciencias Químico-Biológicas de la Universidad de Sonora.

Momento Inicial de equipamiento praxeológico (OD1)
Se requiere que los alumnos tengan una noción del concepto de función y sean capaces de elaborar tablas de datos. De igual manera, los alumnos deben hacer uso de Excel para algunas actividades propuestas y el instructor es responsable del uso de GeoGebra para establecer la importancia de la función exponencial como modelo matemático.

Presentación de la cuestión generatriz
La *Escherichia coli*, bacteria descrita por primera vez en 1885 por Theodore Von Escherich, forma parte de los microorganismos que colonizan el intestino, por lo que se define como un comensal que integra la biota intestinal de diferentes mamíferos, incluido el hombre. Ésta y otras bacterias que colonizan el intestino, son necesarias para el funcionamiento correcto del proceso digestivo, además de participar en la producción de las vitaminas B y K no sintetizadas por el organismo (Eslava et al, 2013). Sin embargo, varios clones de *E. coli* son responsables de una diversidad de enfermedades. Por ello, es importante conocer cómo se reproduce esta bacteria y qué factores favorecen o entorpecen dicha reproducción. Dado que como parte del tratamiento a cualquier tipo de enfermedad, ha surgido una diversidad de medicamentos que brindan diferentes resultados y que en el transcurso del tiempo permanecen los que han mostrado una mayor efectividad, resulta conveniente preguntar lo siguiente:

> *Ante una infección bacteriana por E. coli ¿qué medicamento hipotético dará mejores resultados: un medicamento A con un factor de efectividad del 75% y que se suministra cada tres horas; un medicamento B con un factor de efectividad del 90% y que se suministra cada 6 horas; o un medicamento C con efectividad de 95% y que se suministra cada 24 horas.*

Se plantea un enunciado abierto, OML6, rompiendo el contrato didáctico habitual, en el que el profesor siempre da todos los datos necesarios para que el alumno resuelva el problema.

Momento del primer encuentro (OD2)
La construcción de la OM para introducir la función exponencial inicia a partir de la siguiente tarea concreta:

Actividad 1. En un laboratorio se estudia el crecimiento de una población de bacterias E. coli y se ha comprobado que a una temperatura de 37^{0}C, las bacterias se duplican cada 20 minutos. En cierto momento, se cuentan 64 bacterias, ¿cuántas bacterias había dos horas antes? y ¿cuántas bacterias habrá dos horas después?

Se plantea un primer nivel de complejidad. Se promueve el uso de la técnica de lápiz y papel para alcanzar el resultado deseado. Por una simple actividad recursiva, el alumno debe irse hacia adelante o hacia atrás en el tiempo, duplicando y partiendo por la mitad el número inicial de bacterias, respectivamente, para obtener el resultado esperado.

Desarrollo del REI

Posteriormente, el instructor sugiere a los alumnos utilizar Excel para agilizar el proceso e inducir el salto a la actividad 2, donde se espera que surja el modelo algebraico que dé solución a cualquier tiempo dado antes o después del punto de partida del crecimiento bacteriano en la dirección expresada en la OD7. Para esta actividad, los estudiantes deben generar una tabla de datos, que permita establecer relaciones funcionales actuando dentro de un sistema contextual usando la covariación como concepto alternativo de función y determinar si existe un patrón en los datos generados, OD3.

Actividad 2. ¿Existe algún modelo matemático que permite predecir el crecimiento poblacional de la E. Coli, si en el tiempo ***t* = 0** *se tiene una sola bacteria?*

Se espera que la relación lineal sea la primera relación funcional a la que muchos estudiantes recurran para obtener el modelo matemático. El primer reto consiste en diferenciar la tasa de cambio constante de la función lineal respecto a una tasa de cambio variable en la función exponencial, OD6. Puede ser necesario inducir al estudiante para que encuentre las unidades aditivas y multiplicativas (Confrey y Smith, 1994), para ir formando la expresión algebraica de la función exponencial, de la forma $f(x) = ab^x$, donde x se presenta en forma de un exponente natural.

Una vez creado el modelo algebraico, el alumno debe identificar las restricciones del sistema y establecer cuál es el dominio y rango de la función. Además, el alumno debe distinguir las debilidades y fortalezas de la técnica y reconstruir el modelo, actividad 3, para nuevas situaciones relacionadas con el crecimiento bacteriano, para ello tiene que identificar los elementos que forman parte del sistema, elegir las variables y parámetros que lo determinan y la expresión algebraica del modelo, OD4. Emerge así, el parámetro de la población inicial y, al mismo tiempo, se puede dar el salto a una nueva actividad que nos permita obtener una expresión algebraica con exponente no natural para modelizar otras situaciones del fenómeno en estudio, dándole sentido al uso de los parámetros involucrados para describir el crecimiento microbiano.

Actividad 3. ¿Si la E. coli se triplica cada 32 minutos, cuál es el modelo matemático que me indica el número de E. Coli después de un tiempo dado, cuando se inicia con una sola bacteria; y cuando se inicia con 2,000 bacterias?

En la actividad 4, se pretende que el alumno pueda aplicar los conocimientos adquiridos para resolver un problema concreto que se inserta en el mundo real. Es necesario recurrir a la linealización de los datos, conocimiento adquirido durante el curso de cálculo, para obtener el valor del parámetro *k*, la pendiente de la recta, y después determinar el valor de la población inicial, A_0.

Actividad 4. Suponga que inicia un cultivo de bacterias E. coli el lunes a mediodía. Cuando el cultivo es analizado el martes a las 10:00 A.M. hay 1,200 microorganismos. Para el viernes a las 13:45 Hrs hay 3,600 bacterias. Si se asume que el cultivo crece exponencialmente:

1. Encontrar una función P(t) para el número de bacterias presentes t horas después del lunes a mediodía.
2. *¿Cuántos microorganismos había inicialmente (el lunes a mediodía)?*
3. *¿Cuál es la constante de crecimiento y qué significa este número?*
4. *¿Cuántos microorganismos había a mediodía del miércoles?*

5. ¿Cuándo se obtendrán 5 mil bacterias?

El instructor debe promover el uso de GeoGebra, OD7, para hacer nuevas exploraciones y enriquecer el REI, OD5. A través de los deslizadores, se podrá evidenciar el impacto de la variación de los diferentes parámetros utilizados en el modelo algebraico obtenido y clarificar el significado de los mismos.

Actividad 5. Para una población inicial de 2,000 bacterias, la cual incrementa en una proporción de 40%/h, se suministra un antibiótico A cada tres horas que tiene una efectividad del 75%, ¿cuánto tiempo tomará disminuir la población por debajo de 50 microorganismos, para asegurar que la infección está controlada?. Como controlar la misma población inicial con un antibiótico B, cuya efectividad es del 90% y se suministra cada 6 h; o bien, un antibiótico C, con efectividad del 95%, que se suministra cada 24 h.
Con esta actividad debe concretarse la respuesta a la cuestión generatriz inicial y afianzarse todos los conceptos involucrados con la inserción de la función exponencial.

Implementación del REI

Fueron seis sesiones consecutivas de una hora de duración y tres sesiones más, una cada semana, con estudiantes voluntarios; aunque inicialmente se habían contemplado seis sesiones de dos horas, una por semana, la implementación tardía del REI requirió hacer algunos ajustes. La experimentación se desarrolló de forma más o menos independiente a la evolución del curso Introducción al Cálculo Diferencial e Integral durante el mes de Octubre y Noviembre. En cada una de las sesiones se entregaron informes o trabajos de la sesión por los estudiantes con las respuestas intermedias elaboradas a lo largo de todo el recorrido. Además, aparte de los documentos elaborados por los estudiantes, tanto de forma individual como en grupo, se tiene registro de video de cada una de las nueve sesiones.

Inicialmente se formaron 8 equipos de trabajo, con al menos tres integrantes cada uno, que participaron en las primeras seis sesiones; las últimas tres sesiones se hicieron con el trabajo voluntario de tres estudiantes. No obstante no se realizó un examen diagnóstico para evaluar la primera organización didáctica, OD1, el instructor corroboró la existencia, en términos generales, de este equipamiento praxeológico.

Para presentar la cuestión generatriz, el instructor realiza una serie de preguntas para generar un ambiente propicio. Por ejemplo, "¿qué es la *Eschirichia coli*"?, "¿qué forma tiene?", "qué significa que sea un coliforme?", ¿qué funciones específicas tiene la *E. coli*?, etc. Así mediante preguntas y respuestas se fue generando el espacio para la presentación de la cuestión generatriz en base a la información que se comparte en la descripción del REI, iniciando el proceso didáctico. Inmediatamente, varios estudiantes intentaron responder la cuestión generatriz con diferentes visiones acerca del problema planteado:

- Se resuelve con una función matemática, sin indicar específicamente cual.
- Por lógica, el medicamento con mayor efectividad (95%).
- Por un sistema de funciones, se asume que serían lineales.
- Por Tabulación, pero no se hizo mención a la representación gráfica de los datos.
- Con una regla de tres, lo cual nos habla de la percepción de un comportamiento lineal.

- Con experimentación, lo cual va acorde con el desarrollo futuro de su carrera pensando en experimentar directamente con el microorganismo, pero que no era la intención del presente trabajo.
- La respuesta es el medicamento A, ya que se suministra cada tres horas, se le da más importancia a el periodo de suministro que a la efectividad del medicamento.
- Una alumna cuestiona sobre los efectos colaterales del medicamento, a lo que el instructor responde que no se considerarán en este caso para facilitar el proceso, aclarando que es importante la observación.
- Un estudiante se atrevió a decir que siempre la respuesta es el valor de en medio.

Como se puede observar, la presentación de la cuestión generó el interés deseado e inició con grandes expectativas el REI. Aunque no se desarrolló un análisis profundo si se provocó un rico debate entre los integrantes del grupo, al pedirles que justificaran sus respuestas, lo cual llevó a considerar varios aspectos, entre los que están:

a. ¿Había datos suficientes para determinar cuál de los medicamentos es el más indicado?
b. ¿Qué factores hay que tomar en cuenta para contrarrestar el crecimiento microbiano? De donde emergieron el efecto de la temperatura, la alimentación del microorganismo, el pH, la dosis del medicamento, etc.
c. ¿Bajo qué condiciones se llevaría a cabo el experimento?

Este primer debate, ocasionó que se pidiera a los estudiantes que hicieran una investigación acerca de los factores involucrados en el crecimiento microbiano y qué es lo que determina la dosis y temporalidad del suministro de los medicamentos.

La mayoría de los equipos resolvieron en menos de 20 minutos la primera actividad, por lo que decidieron buscar el modelo algebraico que modelaba el fenómeno, otra señal clara del interés generado. En consecuencia, el instructor solicitó que anexaran su propuesta de modelo algebraico en el reporte final de la sesión, dando un brinco, imprevisto, a la segunda actividad.

Se observaron diversos mecanismos para obtener el resultado esperado, OML3, aunque no todos los equipos fueron exitosos (Figura 1). Sin embargo, algunos decidieron hacer otras exploraciones, de manera autónoma, haciendo otro tipo de conjeturas y trataron de encontrar la expresión algebraica que modela el fenómeno.

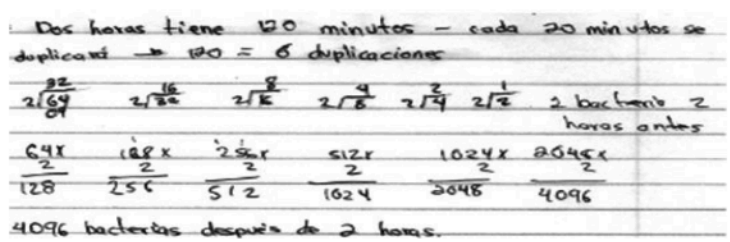


Figura 1. Registro de la actividad recursiva desarrollada por uno de los equipos

Un equipo empezó la actividad considerando el número de 64 bacterias en el tiempo cero, como se muestra en la figura 2, pero tuvieron problemas cuando intentaron obtener el número de bacterias dos horas antes; ellos asumieron que el fenómeno se modelaba con la expresión

$y = x^2$, por lo que consideraron conveniente obtener la raíz cuadrada de 64 para determinar que había 8 bacterias dos horas antes.

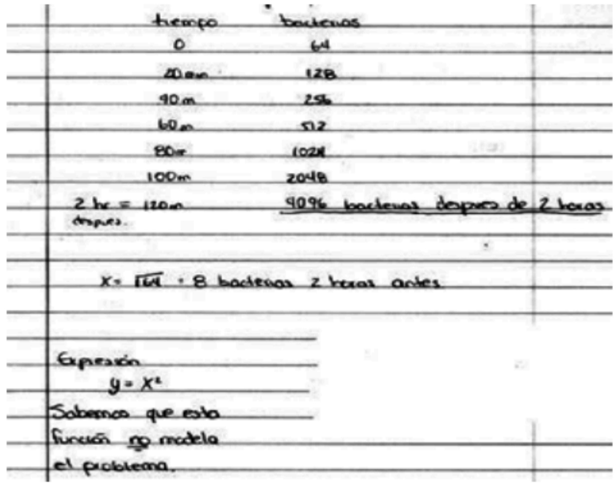
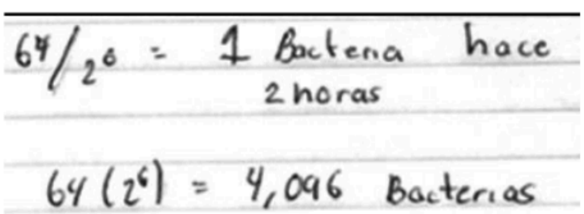


Fig. 2 Evidencia de la actividad del equipo No. 2

Se puede conjeturar que ese razonamiento está relacionado con el hecho de que 64^2 es igual a 4,096, el número de bacterias dos horas después, con lo cual parecería lógico el recurrir a la raíz cuadrada de 64 para saber el número de bacterias dos horas antes.

Un sólo equipo hizo la gráfica correspondiente en el plano cartesiano, aunque no se hizo un uso práctico de la misma. El equipo número 4 asumió que había seis duplicaciones en dos horas, por lo que decidieron dividir 64 entre 2^6 para obtener la solución para dos horas antes y luego multiplicaron 64 por 2^6 para obtener la solución para dos horas después (Figura 3), lo cual nos da una idea de diferentes niveles de razonamiento para darle solución a esta primera actividad.



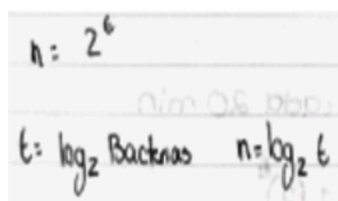


Figura 3. Actividad del equipo 4 y algunos intentos por ofrecer una expresión algebraica para modelar el fenómeno.

Otro equipo intentó obtener el resultado con la expresión $n = 2^t$, donde n es el número de bacterias y t el tiempo, pero al tratar de implementar el modelo no logró obtener las respuestas correctas, por lo que la representante del equipo dijo- *y cuando hice el cálculo me salió mal*-, lo cual es corregido por el instructor al indicar que un pequeño cambio en el manejo de los símbolos daría la respuesta correcta y propone la expresión $B = 2^n$, donde B representaría el número de bacterias y n el número de periodos de 20 minutos; partiendo desde un valor de 0 para el tiempo cero, un valor de 1 para el tiempo de 20 minutos y así sucesivamente, con lo cual se resolvía el problema. Con estos tres procedimientos el instructor aprovechó para señalar el hecho de que por diversas vías se puede llegar a un mismo resultado.

Solo uno de los equipos aportó la expresión algebraica correcta, $y = 8^x$, cuando se considera el tiempo en horas (Figura 4), pero su nivel de argumentación fue muy débil cuando se les solicitó que explicaran como habían obtenido esa expresión algebraica.

Figura 4. Modelo algebraico que caracteriza al fenómeno.

Una vez obtenidas las dos expresiones: $B = 2^n$ e $y = 8^x$, el instructor preguntó al grupo si todos sabían de donde salieron los números 2 y 8. Al haber dudas, se abrió el debate para tratar de darle un significado a esos números. Durante el debate, un alumno aportó la expresión $B = ae^{bt}$ y propuso linealizar la expresión para obtener el valor de b, afirmando que el procedimiento ya era conocido por el grupo, sin embargo, no logró obtener el valor de la pendiente esperado, esto es 1, ya que manejó el tiempo en minutos y no como posición. Ante la incertidumbre, el instructor procedió a identificar las unidades aditivas del tiempo y las unidades multiplicativas del número de bacterias (Confrey y Smith, 1994), tal y como se muestra en la Figura 5 y así concluir que tanto el número 2 como el 8, representan la base de la función exponencial y que representa el número de veces que se reproduce la bacteria en un tiempo dado, OML5.

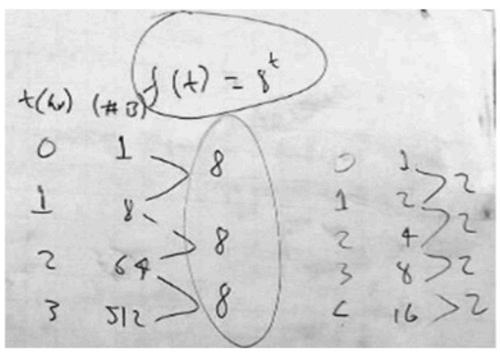


Fig. 5. Unidades aditivas para el tiempo y multiplicativas para el número de bacterias.

Para la representación gráfica del fenómeno, el instructor solicitó establecer el dominio y rango de la función. Quedó establecido que el dominio son todos los reales positivos incluyendo el cero, aunque una alumna expresó que no podía haber cero bacterias, confundiendo la variable dependiente con la independiente, lo cual se aclaró en el instante. El Rango quedó establecido como $[1, \infty)$, aunque se aclaró que no era la representación más correcta dado que se trata de una variable discreta, pero la diversidad de valores que puede tomar la variable dependiente no facilita representarlo de otra manera. Quedó claro que en este caso, la variable tiempo no podía tomar valores negativos y de igual manera, tampoco se podrían asignar valores negativos a la variable dependiente que representa el número de bacterias. Finalmente, el instructor solicitó al grupo que presentaran la gráfica de la función inversa, asumiendo la expresión algebraica $y = 2^x$. Una alumna presentó una gráfica de lo que ella consideraba la función inversa, trazando una especie de eje de simetría y dibujando una curva espejo a la curva de la función, sin tomar en consideración el necesario cambio de escalas de los ejes del plano cartesiano. Para corregir el error, el instructor solicitó simplemente intercambiar los valores de la tabla, considerando los valores de y como x y viceversa, ya que las calculadoras tradicionales no permiten obtener los logaritmos base 2, la función inversa que se quiere graficar.

Se les pidió, también, que hicieran uso de Excel para facilitar la obtención de ambas gráficas, tanto de la función exponencial como de su inversa y solicitar al software, también, que nos proporcionara la ecuación de la gráfica. En este momento, los alumnos observan que el software da una expresión algebraica distinta a la obtenida por ellos y el instructor aprovecha para solicitarles que vean si son equivalentes aplicando las leyes de los logaritmos. Así, se establece que, efectivamente, la expresión $B = 2^t$ es igual a la expresión $B = e^{0.6931t}$, donde $e^{0.6931} = 2$.

La segunda actividad programada, prácticamente ya había sido abordada, por lo que solo se transitó de la expresión algebraica aportada en la actividad uno hacia el uso de las leyes de los logaritmos para relacionar ésta expresión algebraica con la obtenida mediante el uso de la hoja de cálculo de Excel. También se identificaron los parámetros de la nueva función exponencial.

En este sesión, se cuestionó a los estudiantes si la igualdad $8^x = 2^{3x}$ era correcta o no. Al hacer un análisis rápido, una alumna dijo que sí, dado que 2^3 es igual a 8, con lo cual se insertan las tres duplicaciones en el periodo de una hora. Se inicia también el trabajo de la tercera actividad. Por otro lado, se discuten los resultados obtenidos en la tercera actividad. Una estudiante encontró la unidad multiplicativa dividiendo 60 entre 32, cuyo cociente representa el valor del exponente al que se ha de elevar posteriormente la unidad multiplicativa $3^{1.875}$, número de triplicaciones en este caso, esto es, el número de veces que ocurre la triplicación en el intervalo de una hora, para obtener la base de la función, $y = 7.8452^t$, y en Excel, $y = e^{2.0599t}$, cuando se inicia con una bacteria. Una expresión similar se obtiene cuando el número inicial de bacterias es de 2000.

En la cuarta actividad no fue fácil obtener el resultado esperado. Previamente, los alumnos sabían que una función exponencial puede linealizarse si se transforman los valores de la variable dependiente a sus correspondientes logaritmos, naturales en este caso, y con ello obtener el valor de la pendiente, el valor de k en la función exponencial. Posteriormente, podrían obtener el valor de A_0 sustituyendo los datos de un par ordenado, tal y como se aprecia en la figura 6. En este caso, $P(t) = 872e^{0.0145t}$, dado que, al tratarse de bacterias, se hizo un redondeo de los datos.

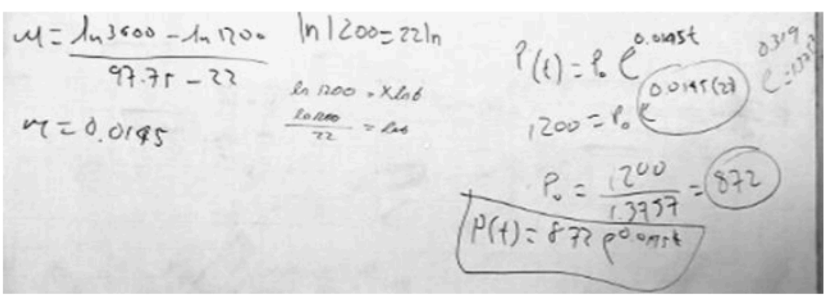


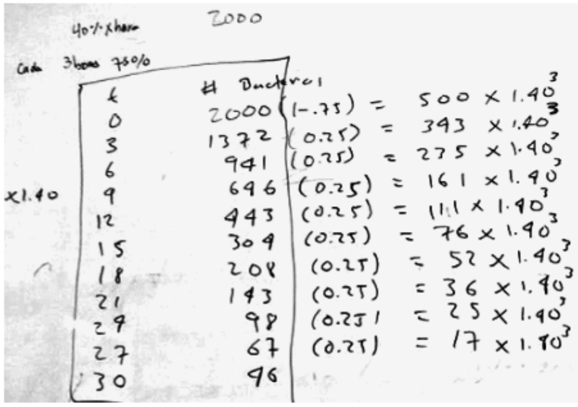
Figura 6. Obtención de la función exponencial que modela el fenómeno de crecimiento, en las condiciones dadas por la actividad 4.

Se hizo un repaso del proceso de linealización para institucionalizar esta alternativa cuando se modela el crecimiento microbiano, dejando en claro que el valor que acompaña a la variable independiente, representa la pendiente de la ecuación de la recta.

Posteriormente, se hizo uso del software GeoGebra, para evidenciar el impacto de cualquier cambio en los parámetros de la función exponencial, mediante el uso de deslizadores. La intención era hacer una nueva exploración y resaltar el apoyo que nos puede brindar la tecnología para comprender mejor los conceptos matemáticos involucrados. Por ejemplo, evidenciar que cuando ***b = 1***, la gráfica de la función es una recta paralela al eje x; incluso, se agregó un parámetro k, representando el número de veces que se reproduce la bacteria en un tiempo dado, en este caso refiriéndonos a la duplicación o triplicación expuestas anteriormente.

En esta sesión, se inicia también la última actividad, modificando el proceder respecto a las actividades anteriores, ya que se abordaría el descrecimiento bacterial, dando lugar a otra de las propiedades de la función exponencial. La primera expresión algebraica que proporcionó una alumna fue: $f(x) = 2{,}000\,(1.4)^x$ asumiendo que ***x*** representa el tiempo en horas. Al generar los primeros datos, para validar el modelo algebraico propuesto, se cometió el error de no considerar la primera aplicación en el tiempo cero y se asumió que el medicamento se aplicó tres horas después de que el individuo se infectó con las 2,000 bacterias. Corregido el punto, se generaron datos asumiendo la primera aplicación del medicamento A en el tiempo cero, quedando 500 bacterias de las 2,000 iniciales, ya que se destruyó el 75% debido al suministro del medicamento. Asumiendo que incrementaba el número de bacterias en un 40% cada hora, para antes de la segunda aplicación se tenían 1372, se repetía el procedimiento y así sucesivamente. Con los datos generados, se observó que no aplicaba el modelo algebraico. Otro alumno propuso una modificación al modelo algebraico y determinó el valor de ***b***, pero cometió el error de tomar en cuenta los datos erróneos de su compañera, con lo cual persistía la idea de modelar el crecimiento bacteriano y no el decrecimiento que se estaba experimentando.

Al generar los datos correspondientes al descrecimiento, tal y como se muestra en la figura 7, los estudiantes fácilmente encontraron la función que modelaba este fenómeno al hacer uso de la herramienta que nos proporciona el Excel y con ello obtener las expresiones algebraicas que se muestran en la figura citada. Se reflexiona acerca de por qué no aparece el valor de 2,000 como valor inicial, si efectivamente se inició con 2,000 bacterias. Obviamente, el software hace un ajuste, debido a que se debe trabajar con números enteros de bacterias, con lo cual fue necesario hacer los redondeos correspondientes en cada valor generado para un tiempo dado.



Medicamento A

$y = 2001.3e^{-0.126x}$

Medicamento B

$y = 2001.4e^{-0.047x}$

Figura 7. Generación de datos, en este caso para el medicamento A, para obtener la expresión algebraica en Excel.

De igual forma, asumiendo un comportamiento exponencial, se pudo obtener el mismo valor de ***-0.126***, al linealizar los datos, y obtener así, el valor de $b = 0.8819$, para la expresión algebraica $f(x) = 2000(0.8819)^x$, tratándose del medicamento A, algo similar se puede hacer con el medicamento B. Con ambos modelos, se puede predecir el tiempo al cual se tendrían 50 bacterias, con lo cual se obtiene la respuesta esperada y se determina que el medicamento A contrarresta mejor la infección, seguido por el medicamento el B. El medicamento C, en cambio, a pesar de su alta efectividad, no tiene un efecto positivo, dado que el tiempo de suministro es muy grande y en lugar de decrecer el número de bacterias, éstas aumentan exponencialmente.

Como se puede apreciar, el proceso de construcción de la actividad matemática, se articuló mediante diversas organizaciones matemáticas y sus correspondientes organizaciones didácticas, con lo cual se enriqueció el REI diseñado. Los alumnos descubrieron, o más bien estuvieron más conscientes del potencial de la función exponencial para modelar un fenómeno de crecimiento bacteriano. Se logró evidenciar la importancia de los parámetros involucrados en el modelo algebraico y fue posible delimitar el campo de acción de la función exponencial para modelar este fenómeno en particular. Se emplearon diversas técnicas para la actividad número uno y fue posible ir incrementando el grado de complejidad hasta lograr dar respuesta a la cuestión generatriz inicial, dando margen a continuar el proceso de complejidad para casos en los que no sea posible trabajar en condiciones ideales. Esto es, el REI diseñado solo es un primer esfuerzo que abre la posibilidad de seguir experimentando y de ser posible, podría tener una aplicación más amplia en cursos posteriores donde se experimenta, directamente, el crecimiento bacteriano y, donde se podría evidenciar el impacto de los factores involucrados en el crecimiento microbiano, inicialmente comentados.

Conclusiones

Como primera conclusión diremos que el Recorrido de Estudio e Investigación es capaz de crear conexiones entre las diferentes piezas de conocimiento, es decir, el desarrollo de lo que se considera tradicionalmente como el "conocimiento metacognitivo". Podemos decir que el recorrido implementado ha permitido: dar funcionalidad a algunos contenidos del tema Funciones, tales como la construcción de la expresión algebraica de una función exponencial; el uso de las gráficas para visualizar la información; y establecer una relación entre las distintas representaciones del concepto de función.

Se generó un proceso de enseñanza y aprendizaje, donde los alumnos tuvieron una gran participación. Tuvieron la oportunidad de desarrollar una amplia gama de destrezas complementarias, tales como: el trabajo en equipo, la expresión escrita y oral, la resolución de problemas abiertos, etc.

Coincidimos con Barquero y col. (2006) quienes enfatizan la importancia de los momentos exploratorios y tecnológicos, durante el recorrido de estudio e investigación. Por lo mismo, coincidimos también, en que la promoción de estos momentos permite a los estudiantes crear hipótesis y reformular preguntas, tanto a nivel individual como cuando trabajan en equipo. Esto constituye, sin duda, una fase importante de la modelización matemática.

Recomendaciones

Una vez analizado el REI diseñado y la forma en que se implementó, se sugiere una corrección con el fin de hacerlo más funcional. Esto es, el uso de GoeGebra debió implementarse desde la segunda actividad para evidenciar el potencial de cada uno de los parámetros de la función exponencial e institucionalizar en ese momento la importancia de los mismos.

Bibliografía

Barquero, B., Bosch, M., Gascón, J. (2010). Génesis y desarrollo de un problema didáctico: el papel de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las CCEE. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIV (pp. 235-244). Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Barquero, B., Bosch, M., Gascón, J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.15, n.1, pp.1-28.

Chevallard, Y. 1999. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.19, 2:221-266. Traducción de Ricardo Barroso Campos (Universidad de Sevilla).

Confrey, J. and Smith, E. 1994. *Exponential functions, rates of change, and the multiplicative units*. Educational Studies in Mathematiccs 26. 135-164. Kluver Academic Publisher. Netherlands.

Courant, R. and Robbins H. (1996). What is Mathematics? An elementary approach to ideas and methods. Oxford University Press. U.S.A.

Fonseca, B . C. 2011. *Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: Los Recorridos de Estudio e Investigación (REI)*. Educación Matemática, vol. 23, núm. 1, Agosto-abril, 2011, pp. 97-121.

García, G.F.J. 2011. Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 14, núm. 1, marzo. pp. 41-70. CLAME.

Hein, N. y Biembengut, M. S. 2006. *Modelaje Matemático como Método de Investigación en Clases de Matemática*. V Festival Internacional de Matemática.

Lo, J.J. and Kratky, J.L. 2012. *Looking for connections between linear and exponential functions*. Mathematics Teacher. Vol. 106, No. 4. November.

Marco Normativo. 2012. Lineamientos Generales para un Modelo Curricular de la Universidad de Sonora. 17 de Diciembre de 2012. Disponible en la Red: http://www.uson.mx/institucional/marconormativo/reglamentosacademicos/lineamientos_modelo_curricular.htm.

Vargas, H.J. 2011. *Descomposición genética de la función exponencial: mecanismos de construcción*. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

Voskoglou, M.G. and Phil, M. 2011. *Mathematical modelling in classroom: the importance of validation of the constructed model*. Proceedings of the 11th International Conference, 352-357, Rhodes University, Grahamstown, South Africa.