

Semiótica de límites de integración triple para volúmenes

Lilia López Vera & Alfredo Alanís Durán

lilia_lopez@hotmail.com, alfredo.alanisdr@uanl.edu.mx

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Universidad Autónoma de Nuevo León

México

Autor de correspondencia: Lilia López Vera

Resumen. De la experiencia docente, en el Cálculo de Varias Variables, se investigaron significados en el sistema semiótico cultural, el sistema semiótico digital, el tratamiento y la conversión entre registros semióticos de los límites de integración triple, para modelar recipientes y calcular volúmenes. En el sistema cultural de signos propio del proceso docente educativo de la Integración Iterada, la Visualización Matemática Tridimensional se constituye en un proceso de codificación y decodificación para la comprensión de conceptos representados por símbolos literales (lo verbal, discursivo) y símbolos icónicos (registro geométrico, registro numérico y registro algebraico).

Palabras clave: objeto matemático, sistemas semióticos, significados, integrales triples.

Abstrac. From the teaching experience, in the Calculus of Several Variables, meanings in the cultural semiotic system, the digital semiotic system, the treatment and conversion between semiotic records of the triple integration limits were investigated, to model containers and calculate volumes. In the cultural system of signs typical of the educational teaching process of Iterated Integration, Three-Dimensional Mathematical Visualization is constituted in a coding and decoding process for the understanding of concepts represented by literal symbols (verbal, discursive) and iconic symbols (geometric register, numerical register and algebraic register).

Key words: mathematical object, semiotic systems, meanings, triple integrals.



1. Introducción

El diseño e implementación de las TIC en el presente trabajo, se fundamenta en la Teoría de la Actividad, *el Carácter Mediatizado* de la psiquis humana, el Carácter Social del aprendizaje y el Carácter Histórico del desarrollo cognoscitivo del estudiante. (Vigotsky)

Los medios, en la presente investigación, serán considerados como potenciadores de habilidades intelectuales, los cuales exigen en los sujetos la decodificación de los mensajes simbólicamente representados y articulan en un determinado sistema de símbolos ciertos mensajes con propósitos instructivos. A través de experiencias de aprendizaje mediado (figurativa o simbólicamente), se incrementan las posibilidades de adquisición del conocimiento, más allá de la mera experiencia directa sobre la realidad que los circunda.

La naturaleza del Sistema Semiótico de cada concepto matemático y cada medio, por el modo de representación y estructuración de sus mensajes, demanda que los profesores y los alumnos activen estrategias y operaciones cognitivas para que la construcción, comprensión y almacenamiento del conocimiento sea significativo y posteriormente sea recuperado y utilizado.

El Cuerpo Académico en Consolidación “Investigación y Visualización Matemática en Innovación Educativa”, responde con el diseño e implementación de recursos didácticos digitales para entornos B-learning (Nexus-aula), en el proceso de solución de problemas que requieran de integración iterada, en el sistema coordinado tridimensional.

Se promovió el desarrollo de la Visualización Matemática a través del Análisis Semiótico y la Transferencia entre registros de representación de regiones de integración, mediados por Imágenes fijas, Geometría Dinámica, Videos, objetos, y representantes objetales, como herramientas cognitivas, en ambiente de aprendizaje Mixto (b-learning)

Se valoró la propuesta para mejorar las acciones de construcción de significados, a través de Observación Participativa, en una dinámica

SEMIÓTICA DE LÍMITES DE INTEGRACIÓN TRIPLE PARA VOLÚMENES

del tipo investigación–acción, para inferir conclusiones a partir de los resultados de las diferentes actividades didácticas.

2. Resultados teóricos tomados en cuenta

2. 1. Semiótica o Semiología

Se ha considerado que incluso al conceptualizar la Semiótica, se enfrenta un debate relacionado a la vida social de los usuarios, dado que:

- a) *En América*, Peirce (considerado el creador de la semiótica) concibe a la semiótica, como “Teoría general de los signos”.
- b) *En Europa*, Ferdinand Saussure la define a la semiología como: "Una ciencia que estudia la vida de los signos en el seno de la vida social".

Desde una perspectiva teórica unificante, *la semiótica general abarca tres saberes: La semántica, la sintaxis y la pragmática*

- *La semántica*: Relación entre el signo y el significado
- *La sintaxis*: Relaciones formales de los signos en cadena
- *La pragmática*: Relaciona a la semántica y a la sintaxis en función de los usuarios

2.2 Concepto Matemático

2.2.1 En Términos Semánticos

La relación entre el signo y el significado en el trabajo matemático, los símbolos (significantes) remiten o están en lugar de las entidades conceptuales (significados).

Vergnaud (1982), en Godino (1994) y Vergnaud (1990), presenta una noción de *concepto matemático* que puede ser interpretada en términos semánticos. Define *concepto* como una triada (S, I, Z) en la cual cada símbolo tiene las representaciones que se muestran en la Tabla 1:

Vergnaud (1982)	Vergnaud (1990)
S: conjunto de situaciones que hacen significativo el concepto;	S: como la referencia (del concepto);
I: conjunto de invariantes que constituyen el concepto;	I: el significado ("el conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas");
Z: conjunto de representaciones simbólicas usadas para presentar el concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere	Z: el significante (conjunto de formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento.

Tabla 1: Tabla comparativa de la noción de concepto matemático.

(Vergnaud, 1990) concluye que "Un concepto no toma su significado en un sólo tipo de situaciones y una situación no se analiza con ayuda de un sólo concepto"

SEMIÓTICA DE LÍMITES DE INTEGRACIÓN TRIPLE PARA VOLÚMENES

2.2.2 En Términos Pragmáticos

Para Peirce, C. (1897) en Restrepo, M. (2003), **todo signo es triádico y pragmático**, es decir que necesita la cooperación de tres instancias que son el objeto O (lo que se representa), el signo S y el interpretante I, concluye que “Se logra la comunicación cuando el objeto O del productor y el objeto O’ del intérprete coinciden”.

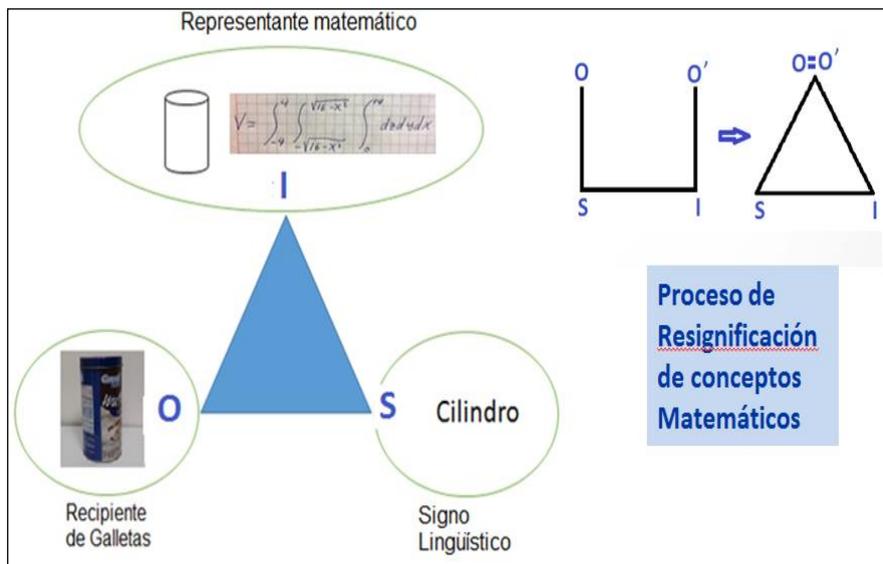


Figura 1: Significatum (o referente), entonces objeto?

2.3. Sistemas Semióticos y Sistemas de Representación

Macías J.,(2014), afirma que Duval (1993, 1995, 1996, 2006a, 2006b, 2006c, 2006d,), llama noesis a la actividad ligada a la aprehensión conceptual de los objetos representados, incluyendo las diferentes actividades y procesos cognitivos desarrollados por el sujeto; llama semiosis a la actividad ligada a la producción de representaciones, la cual depende de los signos que forman parte del sistema utilizado para generarlas; e identifica la existencia de múltiples y diversos sistemas semióticos, que hacen referencia a un mismo concepto matemático, cada uno de los cuales tiene sus dificultades y limitaciones;

Tomando en cuenta los Registros de Representación Semiótica de Duval, R., (1993, 1995) en Macías J., (2014) “Para que un sistema semiótico (sistema de signos) sea un sistema de representación, debe poder permitir tres acciones:

1. *Identificación*: consiste en el reconocimiento de las representaciones que se presentan ante el sujeto, lo que implica una selección de rasgos en el contenido a representar.
2. *Tratamiento*: consiste en la transformación de una representación en otra del mismo sistema.
3. *Conversión*: consiste en la transformación de una representación en una representación de otro sistema semiótico”.

Al investigar los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo, Duval, R., (2001), en Rojas, P., (2012), afirma que existen *tres polos constitutivos de la representación* que no deben confundirse:

- a) *El objeto representado*.
- b) *El contenido de la representación del objeto* (cambia en función del sistema por el cual fueron producidas).
- c) *La “forma” de la representación*, (su modalidad o su registro).

Por lo que Duval afirma que “Para que no se produzca confusión entre el objeto matemático y una representación, es necesario trabajar con más de un registro semiótico.”

2.4. Semióticas lingüística y visual

Según Barthes, R. (1980), afirma que la totalidad de la información se sostiene sobre dos estructuras concurrentes. La primera -lingüística- está compuesta por palabras (mensaje connotado), Permite abstracciones. Cuando el texto connota la imagen (la carga), le impone una cultura, una lógica, etc. mientras que la segunda -imagen- está compuesta por líneas, planos y tintes (mensaje denotado). Cuando la imagen ilustra al texto lo hace más claro. Cualquier imagen tiene un texto de anclaje, un significado.

SEMIÓTICA DE LÍMITES DE INTEGRACIÓN TRIPLE PARA VOLÚMENES

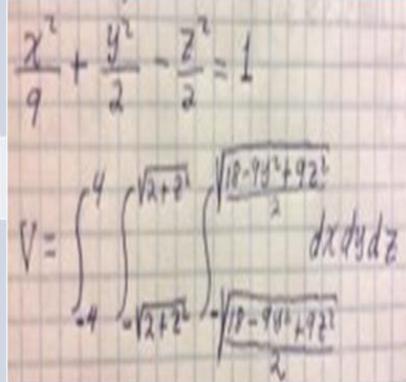
Estructura Verbal (o lingüística). Actúa un interpretante (Peirce) El concepto (Saussure)	Estructura Fotográfica (o imagen). Actúa el fundamento del representante, no todo el objeto (Peirce). La imagen (Saussure)
<p>Calcular la CAPACIDAD VOLUMÉTRICA (VOLUMEN) de un recipiente hiperbólico de altura ocho, MODELADO POR "equis cuadrada entre nueve, mas ye cuadrada entre dos, menos zeta cuadrada entre dos, igual a uno"</p> <p>Superficies que acotan al volumen superficies hiperbólicas</p> <p>Curvas que delimitan al dominio de dichas superficies (hipérbola). Dominios de curvas que delimitan al dominio de las superficies que acotan al sólido : intervalo cerrado de menos cuatro a cuatro.</p>	

Tabla 2: Tabla comparativa de semióticas lingüística y visual

2.5. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos

Chevallard (1991) define un *objeto matemático* como "un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, palabras o expresiones pronunciadas; registro de lo gestual; dominio de la inscripción, lo que se escribe o dibuja (grafismos, formulismos, cálculos, etc.), es decir, registro de lo escrito". Llama praxema a los "objetos materiales ligados a las prácticas" y usa esta noción para definir el objeto como un "emergente de un sistema de praxemas".

A las Semióticas Específicas se les definen como "gramáticas" (es decir, como un conjunto de reglas explícitas) de sistemas particulares de signos que admitimos como datos de observación. En este sentido, se considera fundamental el modelo de Godino & Batanero (1994), quienes definen al Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, y retoman lo afirmado por Balacheff (1990) quien cita al significado como palabra clave de la problemática de investigación de la Didáctica de la Matemática. (Balacheff, 1990 en Godino 1994)

Respecto a la *dinámica del significado personal de los objetos matemáticos*. Artigue (1990), señala dos sentidos complementarios para el término *concepción*: el punto de vista epistemológico (naturaleza compleja de los objetos matemáticos y de su funcionamiento) y el punto de vista cognitivo (los conocimientos del sujeto en relación a un objeto matemático particular).

Sobre *las concepciones del sujeto sobre el concepto*, se coincide con la opinión de Godino, acerca de que se distinguen dos tipos de usos según los distintos autores, a través de las cuales se hace evidente que *la semiótica general abarca tres saberes: La semántica, la sintaxis y la pragmática*:

- a) La *concepción (epistemológica y cognitiva) en su carácter global* tiene en cuenta "el sistema global de conocimientos y creencias del sujeto" en relación a un objeto.
- b) La *concepción como un objeto local*, es estrechamente asociada al saber puesto en juego y a los diferentes problemas o investigaciones en que intervienen.

En esa dirección RADFORD (2003) enuncia que las palabras tienen una historia cultural y presenta la hipótesis de que "Para comprender la REALIDAD CONCEPTUAL y la producción de conocimiento matemático no basta limitarse sólo al lenguaje y a la actividad discursiva, sino que deben incluirse las prácticas sociales que subyacen en ellas".

2.6. Sistemas Culturales Semióticos (SCS)

La conceptualización del objeto del signo y su manera de denotarlo genera un nuevo tipo de "*parecido formal*" que conduce a un espacio histórico cultural Radford (2003), de donde surge el lenguaje algebraico simbólico (un lenguaje para realizar cálculos con base en un tipo arbitrario de designación sin ningún parecido con el objeto designado).

SEMIÓTICA DE LÍMITES DE INTEGRACIÓN TRIPLE PARA VOLÚMENES

Objetivar palabras y signos matemáticos es una consecuencia de la abstracción que resulta de un sistema que incluye la estética de la representación semiótica y del *significado lógico textual y cultural*, para la Matemática Universitaria.

Desde una Semiótica Cultural, LUIS RADFORD (2005b), llama *Sistemas Culturales Semióticos* (SCS) a la superestructura simbólica que, juntamente con la dimensión histórico cultural, da cierta forma y organización a la actividad de los individuos.

Afirma que “El objeto se presenta de un modo icónico (Radford, 2001). Se vuelve sensible (Kant, 1781, 1787/1996) en un acto de representación que nos permite establecer una línea con un profundo significado entre el objeto pretendido y su representación (Husserl, 1900/1970). En virtud de su iconicidad, el objeto es dotado con un significado que permite ciertas formas de TRATAMIENTO o REPRESENTACIONES (Duval, 1993)”

113

3. Aspectos Metodológicos

La Investigación es de carácter Descriptivo, tomando elementos de Investigación cualitativa y Cuasi-Experimental, en dos grupos de estudiantes seleccionados con niveles de homogeneidad semejantes, pero aplicando la estrategia didáctica solo a uno de los dos.

Se realizó observación participativa y entrevistas a profundidad, para identificar posibles conflictos semióticos e incongruencias en el significado asignado a los diversos objetos matemáticos.

Como *herramientas de trabajo y herramientas del pensamiento*, las TICs provocan cambios en las estructuras sociales y mentales del alumno para la Matemática Universitaria. Por lo que se aplicaron las cuatro etapas de la Metodología PACIE en ambiente b-learning:

1. Exposición (Información, enlaces y documentos),

2. Rebote (acciones de filtro, autocrítica, discusión),
3. Construcción (se guía, se analiza, se crea y se comparte)
4. Comprobación (síntesis, comparación y verificación).

Los recursos digitales como herramientas mediatizadoras, se basaron en la relación símbolo-objeto para el aprendizaje de conceptos que estructuran a cada integral triple.

4. Actividades Didácticas

4.1 Tratamiento y conversión entre representaciones del objeto matemático

En la actividad didáctica, el alumno realizó Transferencia entre los registros de representación para apropiarse del objeto matemático (sólido o contenedor), representado mediante una semiótica analítica, semiótica numérica y semiótica gráfica, en los límites de integración para volúmenes.

Se diseñaron e implementaron recursos didácticos digitales para entornos B-learning (Nexus-aula), con Metodología PACIE en el proceso de solución de problemas que requerían de integración iterada, sobre cada tipo de Región Elemental W , en el sistema coordenado tridimensional.

4.2. Actividad Docente: Ubicación Espacial en Visualización Matemática Tridimensional

SEMIÓTICA DE LÍMITES DE INTEGRACIÓN TRIPLE PARA VOLÚMENES

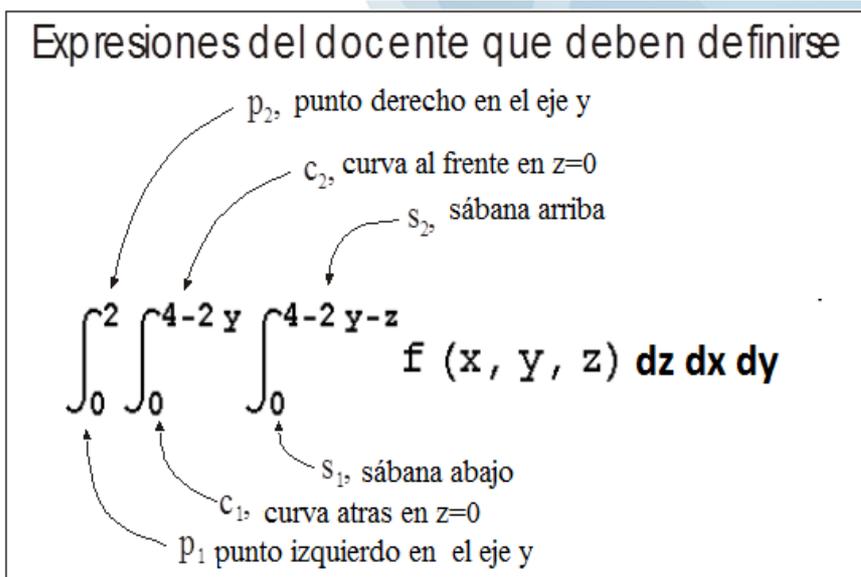


Figura 2: ¿Qué significa el integrando?

4.3 Actividades del Alumno

Actividad 1.

Si $W = \{(x,y,z) / 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 4-2y, 0 \leq z \leq 4-2y-x\}$

¿Marcar con una X, qué significa W para el alumno?

Área, Superficie, Sólido

- a) Cuáles _____ son _____ las superficies? _____
- b) ¿Cuál es el dominio de las superficies?

- c) Plantear la integral para calcular el volumen: _____

Actividad 2.

$$W = \{(x,y,z) / 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 4-2y, 0 \leq x \leq 4-2y-z\}$$

- a) Cuáles son las superficies? _____
- b) ¿Cuál es el dominio de las superficies? _____
- c) Plantear la integral para calcular el volumen: _____

Tabla 2: Tratamiento y conversión entre Registros de Representación Semiótica

4.4 Actividad Docente. W es Región de integración Tipo II: con sábanas al “frente y atrás”, con el dominio de las funciones en el plano YZ, dado por los límites de integración correspondientes a los diferenciales de área $dzdy$ como se observa en la figura 3

Expresiones del docente que deben definirse

$\int_0^2 \int_0^{4-2y} \int_0^{4-2y-z} f(x, y, z) dx dz dy$

p_2 , punto a la derecha
 c_2 , curva arriba
 s_2 , sábana al frente
 s_1 , sábana atrás
 c_1 , curva abajo
 p_1 punto a la izquierda

Figura 3: ¿cuáles límites de integración corresponden al dominio de las superficies?

SEMIÓTICA DE LÍMITES DE INTEGRACIÓN TRIPLE PARA VOLÚMENES

4.5. Ubicación Espacial Tridimensional en Espacio No Modelado y en Espacio Modelado

De la experiencia docente, se identificó la relevancia de la Ubicación espacial en la Visualización Matemática Tridimensional (López,L./Alanís,A./Pérez,O.,2005), para el tratamiento en los representantes geométricos de cada límite en la integración triple.

En la Tabla 2, se puede observar que al considerar al objeto (recipiente cilíndrico en posición vertical y horizontal), los Significados de los límites de integración y de los diferenciales son diferentes

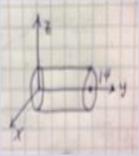
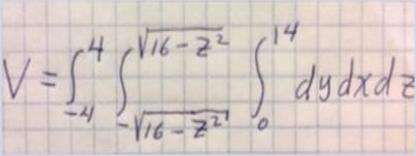
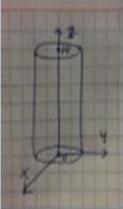
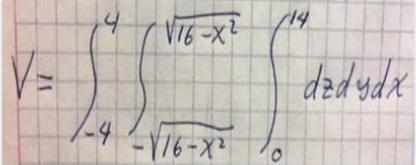
Objeto en espacio no modelado	Objeto en espacio modelado	Semiótica de límites de integración para el Volumen del objeto
		
		

Tabla 3: Significados diferentes de los límites y los diferenciales

4.6. Identificación de Objetos Matemáticos en *Sistemas Culturales Semióticos* (SCS) y Significados lógico textual y culturales

“Para comprender la realidad conceptual y la producción de conocimiento matemático se incluyeron imágenes sobre las prácticas sociales que subyacen en ellas”.

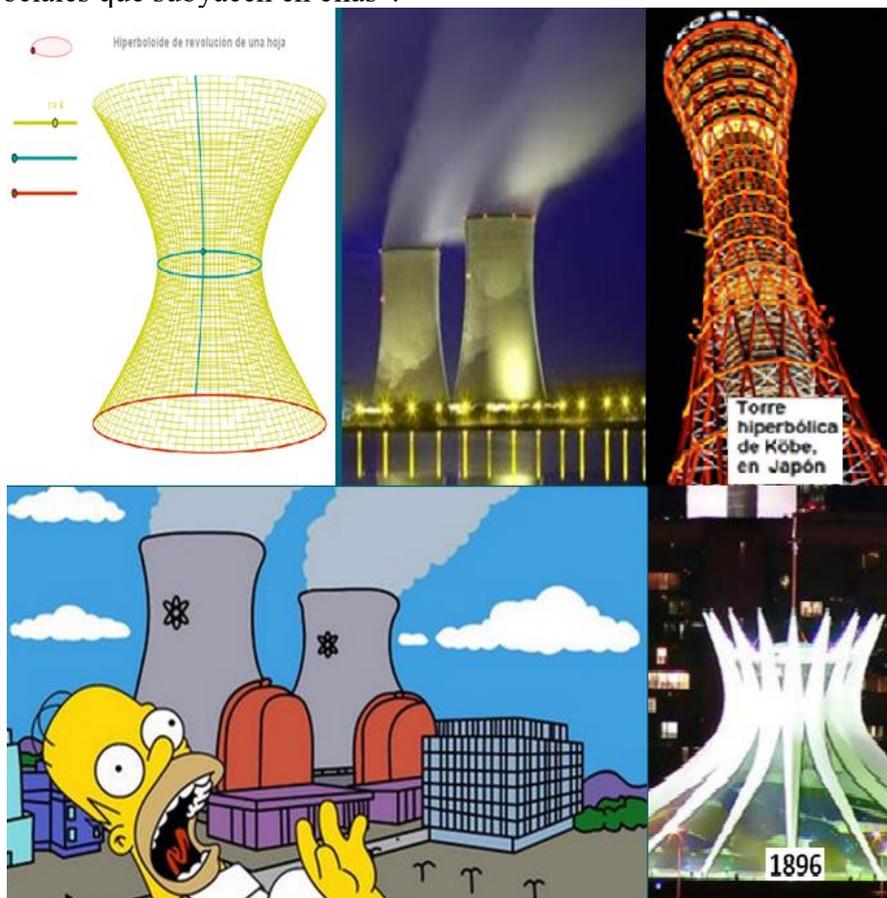


Figura 4: Sistema Cultural Semiótico de hiperboloides de una hoja

4.7. Sistemas Semióticos de Recursos Digitales en la Matemática de Nivel Superior

Las Actividades de Sistemas Semióticos de Recursos Digitales en la Matemática de Nivel Superior son casos específicos de Sistemas Culturales Semióticos.

El Tratamiento y Transferencia entre registros de representación, MEDIADO POR SISTEMAS SEMIÓTICOS DE RECURSOS DIGITALES, permite identificar Conflictos Semióticos en la Matemática de Nivel Superior

SEMIÓTICA DE LÍMITES DE INTEGRACIÓN TRIPLE PARA VOLÚMENES

Las palabras excedidas de la realidad empírica ofrecen operaciones entre números con una cierta autonomía, creando así, OTRA REALIDAD (Radford (2003).

Por ejemplo, los Comandos en Mathematica para el cálculo de métricas y áreas de superficies, exigen Alfabetizaciones Múltiples para el aprendizaje de conceptos Matemáticos del Cálculo de Varias Variables y por ende de la Geometría Diferencial.

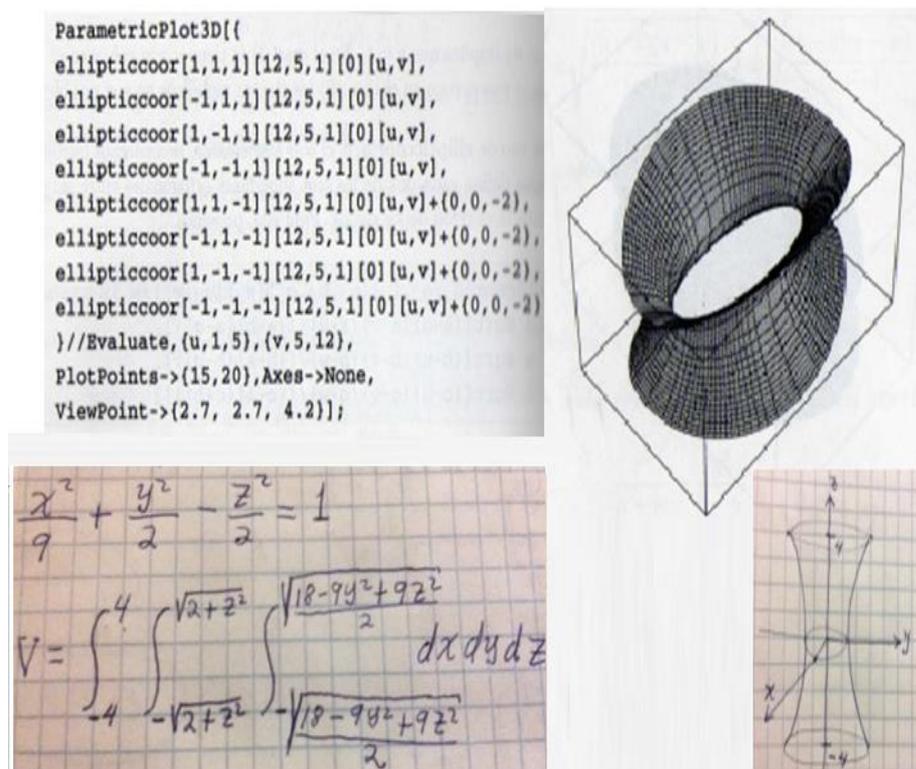


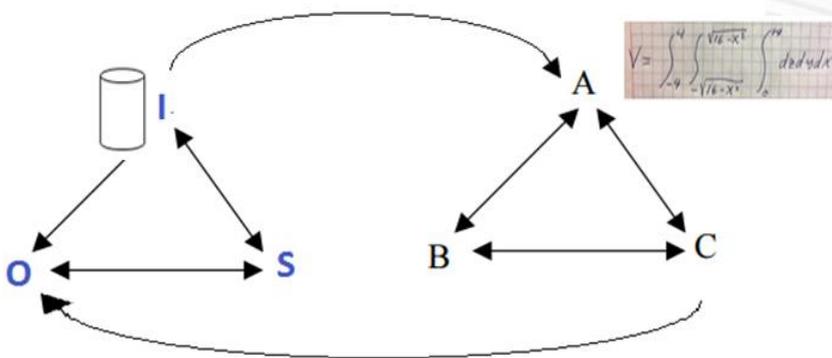
Figura 5: Sistemas Semióticos de Recursos Digitales en la Matemática de Nivel Superior

5. Discusión: ¿Qué se enseña, qué se aprende y qué se comprende?

Duval, R., (2001), en Rojas, P., (2012), considera que toda actividad y proceso matemático lleva consigo la capacidad y necesidad de cambiar de registro para poder obtener la comprensión.

Mientras que Sierpinska, A. (1990), relaciona íntimamente la idea de significado con la de comprensión: "Comprender el concepto será entonces concebido como el acto de captar su significado. Este acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados a elementos particulares de la "estructura" del concepto (la "estructura" es la red de sentidos de las sentencias que hemos considerado). Estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión" (p.27). "La metodología de los actos de comprensión se preocupa principalmente por el proceso de construir el significado de los conceptos" (p.35).

Si partimos de un objeto matemático dado por el interpretante, entonces podemos reconsiderar lo afirmado por Lyon, (1980) en Godino & Batanero (1994) quien define la relación ternaria, donde el **signo A** representa un término o expresión matemática, **B el objeto matemático (concepto, proposición, procedimiento, ...)** y **C el significatum (o referente)** de dicho objeto.



Si **S** es el 1º, **I** es el 2º, entonces **B** es EL OBJETO MATEMÁTICO

El alumno **COMPRENDERÁ** lo aprendido cuando se logre que **C = O**

Figura 5: Objeto Matemático Del Interpretante

Entonces podríamos considerar que enfrentamos un proceso iterado en el que se regresa para volver a ver el objeto matemático o primero el objeto, o , para avanzar en el nivel educativo, construyendo o

SEMIÓTICA DE LÍMITES DE INTEGRACIÓN TRIPLE PARA VOLÚMENES

modificando los nuevos objetos matemáticos requeridos para la Matemática del Nivel Superior.

5. Conclusiones

El enfoque ontosemiótico permitió distinguir el significado institucional y el personal de los alumnos respecto a un mismo objeto matemático, para determinar los *conflictos semióticos* (interpretaciones de expresiones matemáticas hechas por los estudiantes que no concuerdan con las pretendidas por el profesor acerca de los límites de integración de las integrales triples para volúmenes).

La Semiótica Matemática en la Innovación Educativa, demanda el desarrollo de competencias digitales, docentes e investigativas, que conduzcan a la búsqueda de estrategias de aprendizaje mediado, para propiciar la Transferencia y Visualización Matemática en la manipulación objetiva y/o virtual, de objetos de aprendizaje.

121

En la Integración Iterada, se evidenció lo afirmado por Vigotsky: “Si los símbolos sólo significan para el estudiante los *aspectos externos* de los fenómenos que representan, no podrá usar su arsenal simbólico *a un nivel productivo* y no podrá resolver problemas donde intervengan los objetos representados”.

El paso de la semiótica gráfica a la analítica y viceversa actuó como dinamizador en el tránsito de las acciones verbales a las mentales. La transferencia de una semiótica a otra, contribuyó a la interiorización y construcción de significados en la SEMIÓTICA DE LÍMITES DE INTEGRACIÓN TRIPLE PARA VOLÚMENES

Los Conflictos Semióticos no son exclusivos de la Matemática de Nivel Superior, por lo que se debe responder a las demandas institucionales, de diseñar estrategias que contribuyan a resolver los

problemas de aprendizaje y comprensión de significados de los conceptos de la Matemática de diferentes niveles educativos.

6. Referencias Bibliográficas

- Artigue, M. (1990), Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 10, n° 2,3, pp. 241-286.
- Balacheff, N. (1990). *Towards a "problématique" for research on mathematics teaching*. Journal for Research in Mathematics Education, 21, (4), p. 259-272.
- Barthes, R. (1980). *Comunicación y lo natural, La actuación y los signos, Introducción a la lingüística estructural*. Recuperado el 07 de 06 de 2015, de <http://comunicacion.idoneos.com/334756/>
<http://www.monografias.com/trabajos37/semiotica/semiotica2.shtml#ixzz3lOFdOy3c>
- Chevallard, Y. (1991), *Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique*. Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble. LSD2-IMAG, Université Joseph-Fourier, Grenoble.
- Duval R. (1993). *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, en Hitt ,F., (1998). Investigaciones en Matemática Educativa II. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Duval, R. (1998): *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. Investigaciones en Matemática Educativa. Grupo Editorial Iberoamérica. (Traducción de *Régistres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*, 1993).
- Duval R. (2006). *A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics*. Educational Studies in Mathematics, 61: pp. 103-131.
- Godino, J.D. & Batanero C. (1994). *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos*. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14, n° 3, pp. 325-355, 1994. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The*

SEMIÓTICA DE LÍMITES DE INTEGRACIÓN TRIPLE PARA VOLÚMENES

- International Journal on Mathematics Education* 39 (1–2), 127–135.
- Hitt Espinosa, F. (1998): *Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum*. Educación Matemática, Vol.10, No.2, pp.23 – 45
- López, L./Alanís, A./ Pérez, O. (2005). *La Habilidad Ubicación Espacial Matemática, como Habilidad Esencial, en la Visualización Matemática*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol.18, pg. 130 - 137. ISBN: Formato Digital 970-9971-00-X, ISBN: Formato Impreso 970-9971-01-8.
- Macías Sánchez, J. (2014) Los registros semióticos en Matemáticas como elemento personalizado en el aprendizaje. Revista de Investigación Educativa Conect@2, 4(9): 27-57. Encuentro Internacional EPEDIG de Educación Personalizada Consultado en http://www.revistaconecta2.com.mx/archivos/revistas/revista9/9_2.pdf
- Peirce Ch. (1897). *Fundamento, objeto e interpretante*. Traducción castellana de Mariluz Restrepo (2003). *Texto tomado de MS 798 [On Signs] c.1897, 5 pp. Fue publicado como CP 2.227-229 y 2.444n1*.
- Radford, L. (2006b). Semiótica Cultural y Cognición. In R. Cantoral et al. (Eds.), *Investigaciones sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Un Reporte Iberoamericano* (pp. 669 -689). México: Díaz Santos.
- Radford, L. (2003). *Sobre los límites epistemológicos del lenguaje: conocimiento matemático y práctica social. Handbook of international Research in Mathematics Education* . <https://books.google.com.mx/books?isbn>
- Sierpínska, A. (1990). *Some remarks on understanding in mathematics*. For the Learning of Mathematics, Vol 10.3,24-36
- Vergnaud, G. (1990). *La théorie des champs conceptuels*. Recherches en Didactiques des Mathématiques, Vol. 10, n. 2,3, pp. 133-170.

