Derivación implícita en optimización elemental

Implicit derivation in elementary optimization

El Cálculo y su Enseñanza

ISSN: 2007-4107 (electrónico)

José Saquimux

jsaquimux@yahoo.co.uk

Universidad de San Carlos
Guatemala

Recibido: 09 de diciembre de 2023

Aceptado: 15 de marzo de 2024

Autor de Correspondencia:

José Saquimux

Resumen: Caracterizamos la naturaleza de algunos problemas de optimización aplicados que se estudian en cálculo elemental. Usamos dichas características para determinar relaciones geométricas y analíticas entre curvas implícitas implicadas en tales problemas. A partir de dichas relaciones, construimos un procedimiento para su resolución usando derivación implícita. Discutimos sus bondades, carencias y dificultades pedagógicas, y lo comparamos cualitativamente con el procedimiento tradicional de optimización con una variable.

Palabras clave: Optimización, derivación implícita, GeoGebra.

Abstract: characterize the nature of some applied optimization problems that are studied in elementary calculus. We use such characteristics to determine geometric and analytical relationships between implicit curves involved in such problems. From these relationships, we build a procedure for their resolution using implicit derivation. We discuss its benefits, shortcomings, and pedagogical difficulties, and we qualitatively compare it with the traditional optimization procedure with one variable.

Keyword: Optimization, implicit derivation, GeoGebra.

1. Introducción

Los primeros métodos generales para resolución de problemas de optimización elementales fueron creados hace cerca de 300 años en los inicios de creación del análisis matemático. Actualmente en la vida práctica, especialmente en economía y tecnología han surgido nuevos problemas de optimización que se resuelven mediante la creación de nuevos campos del análisis matemático[1] (Tikhomirov, 1986, p. ix), temas que deben enseñarse en varias carreras de ingeniería. Atendiendo a esta necesidad de formación matemática del futuro ingeniero, creemos que como etapa inicial del estudio de resolución de problemas de optimización generales y nuevos que surgen o se presentan en ingeniería, se enseña resolución de problemas de optimización elementales usando procedimientos del cálculo de una variable.

Es bien conocido en profesorado de cálculo elemental en carreras de ingeniería que el aprendizaje de resolución de problemas de optimización presenta diversas y serias dificultades de aprendizaje a muchos estudiantes. La necesidad de que querer resolver esta problemática ha generado varias investigaciones sobre su enseñanza (Villegas, et al., 2009, p. 286). Con el fin de favorecer o mejorar su aprendizaje, en algunos reportes de investigación y propuestas de su enseñanza se sugiere enseñar a resolverlos presentando varios procedimientos, usando varias representaciones (Malaspina, 2004, p. 931) y herramientas para su tratamiento.

Revisando algunos textos de cálculo de una variable usados en carreras de ingeniería de nuestro medio, por ejemplo (Helfgott, 2023 y Stewart, et al., 2021), vemos que en ellos se presenta un único procedimiento de resolución (Stewart, et al., 2021, p. 336).

En una indagación bibliográfica al respecto en internet (2023) en idiomas español e inglés, encontramos que al menos desde 1997 se ha propuesto la aplicación de derivación implícita en el estudio de optimización elemental. Black (1997) presenta un procedimiento de resolución usando derivación implícita motivada del método de multiplicadores de Lagrange y del establecimiento visual de relaciones geométricas de tangencia entre curvas implícitas de nivel implicadas y la curva implícita de la restricción. Siendo ésta la única referencia que encontramos en el que explícitamente se menciona el uso de derivación implícita para resolución de problemas de optimización en cursos de cálculo de una variable.

[1] Por ejemplo, Análisis convexo y Teoría de control óptimo, entre otros.

Es bien conocido en profesorado de cálculo elemental en carreras de ingeniería que el aprendizaje de resolución de problemas de optimización presenta diversas y serias dificultades de aprendizaje a muchos estudiantes. La necesidad de que querer resolver esta problemática ha generado varias investigaciones sobre su enseñanza (Villegas, et al., 2009, p. 286). Con el fin de favorecer o mejorar su aprendizaje, en algunos reportes de investigación y propuestas de su enseñanza se sugiere enseñar a resolverlos presentando varios procedimientos, usando varias representaciones (Malaspina, 2004, p. 931) y herramientas para su tratamiento.

Revisando algunos textos de cálculo de una variable usados en carreras de ingeniería de nuestro medio, por ejemplo (Helfgott, 2023 y Stewart, et al., 2021), vemos que en ellos se presenta un único procedimiento de resolución (Stewart, et al., 2021, p. 336).

En una indagación bibliográfica al respecto en internet (2023) en idiomas español e inglés, encontramos que al menos desde 1997 se ha propuesto la aplicación de derivación implícita en el estudio de optimización elemental. Black (1997) presenta un procedimiento de resolución usando derivación implícita motivada del método de multiplicadores de Lagrange y del establecimiento visual de relaciones geométricas de tangencia entre curvas implícitas de nivel implicadas y la curva implícita de la restricción. Siendo ésta la única referencia que encontramos en el que explícitamente se menciona el uso de derivación implícita para resolución de problemas de optimización en cursos de cálculo de una variable.

Por otro lado, encontramos investigaciones más recientes sobre resolución de problemas de optimización con multiplicadores de Lagrange, en los que se menciona la relación de tangencia entre curvas de nivel y de la restricción, pero no sugieren, no presentan el uso de derivación implícita como una posible herramienta alternativa para resolución de problemas de optimización en cálculo de una variable. (Choi, 2015; Grande y Vazquez, 2014; Valenzuela y Barrantes, 2018).

Planteamos preguntas sobre resolución de problemas de optimización en cálculo elemental al lenguaje de programación ChatGPT (OpenAI, 2023). En sus respuestas menciona únicamente el procedimiento tradicional de una variable (Stewart, et al., 2021, p. 336). A preguntas similares, pero con la mención de resolución con derivación implícita, propone usar el método de multiplicadores de Lagrange y de derivadas parciales aún para problemas con dos variables reducible a una función de una variable.

Los resultados de la indagación que mencionamos nos hacen creer, que la derivación implícita no se ha sido divulgada, no es de uso común o no es apreciada, como herramienta alternativa en la resolución de problemas de optimización en cálculo elemental.

Esta situación de enseñanza y atendiendo la sugerencia de Malaspina (2004 p. 931) sobre el beneficio en el aprendizaje al usar varios procedimientos o enfoques de resolución, nos ha motivado a querer fundamentar y construir un procedimiento usando derivación implícita, que sea alternativo o complementario al procedimiento único y tradicional para resolver algunos problemas de optimización que se estudian en cálculo elemental.

Así, nuestro propósito central de enseñanza es proponer un procedimiento que se apoye en derivación implícita; para ello, en este documento caracterizamos la naturaleza de algunos problemas de optimización, usamos dicha caracterización para establecer informalmente relaciones geométricas y analíticas en el punto óptimo, y de esto último, establecemos un procedimiento para su resolución siguiendo al propuesto en (Black, 1997 p. 3). Describimos su visualización dinámica con el software GeoGebra (Versión 6) en ejemplificaciones.

Al final, comparamos cualitativamente este procedimiento, con el tradicional, de optimización en una variable, señalamos y discutimos algunas bondades y problemas de enseñanza y aprendizaje que hemos observado y experimentado al poner en acción nuestra propuesta dentro de la trayectoria de enseñanza acostumbrada en un curso de cálculo elemental de ingeniería en nuestro medio.

2. Naturaleza de algunos problemas de optimización

Describamos la naturaleza general de problemas de optimización aplicados con dos variables físicas continuas, que se estudian en cálculo elemental. Consideremos el caso de problemas con un valor máximo absoluto[2] sin extremos locales en intervalos abiertos.

Es un problema en el que se tiene un conjunto continuo de objetos físicos[3] diferentes de una misma especie que cumplen cierta restricción (dada o se establece) descrita en términos de dos dimensiones variables x y y de los objetos en sus dominios físicos[4] $0 \leq a < x < b$ y $0 \leq c <$

[2] En lo sucesivo entenderemos que los valores óptimos o extremos (máximos o mínimos) son absolutos.

[3] Se puede extender a problemas donde se tiene un conjunto continuo de magnitudes asociadas a eventos. Por ejemplo, en el conjunto continuo de tiempos que puede durar cierto evento, determinar el evento para el cual se logre el menor tiempo, etc.

[4] Distinguimos. En un problema de optimización, si x y y representan distancias (físicas) continuas, en la restricción $y - 2 = 3/(x-1)$, sus dominios matemáticos respectivos son $R - \{1\}$ y $R - \{2\}$, mientras que sus dominios físicos son $x > 1$ y $y > 2$.

$y < d$[5]. Bajo esta restricción, al hacer covariar x y y continuamente en sus respectivos dominios, una magnitud física z de los objetos varía continuamente en correspondencia.

En este conjunto, con las condiciones y relaciones establecidas se cumple.

a) Si hacemos que x tienda por la derecha b (x crece), entonces y tiende por la izquierda c (y decrece) y z decrece,

b) Si hacemos que x tienda por la izquierda de a (x decrece), entonces y tiende por la derecha de d (y crece), y z decrece,

c) El contrario de la tendencia anterior en b), si hacemos crecer x a partir del extremo izquierdo a, entonces y decrece a partir del extremo derecho d; se sigue que z debe crecer.

Por lo que de c) y a) al hacer crecer x en su dominio, z debe crecer y luego decrecer, esto nos induce que,

i) Debe existir un único objeto donde z alcanza su valor máximo en los dominios físico de las variables. Intuición de optimización señalado en (Malaspina y Font, 2010, p.6),

ii) Deben existir dos objetos diferentes alrededor del objeto en el cual se maximiza z que tienen un mismo valor menor que el valor máximo,

iii) Para estos pares de objetos, mientras más similares sean sus dimensiones correspondientes independientes, los valores de z se aproximan más al valor máximo. (conclusiones similares se puede establecer para la variable y)

El objetivo es determinar el valor máximo de z, y las dimensiones físicas para el cual se alcanza dicho máximo que cumple la restricción.

3. Relación geométrica y analítica en el punto óptimo

[5] En algunos problemas los extremos de los intervalos pueden ser infinito.

Usemos la caracterización anterior para sustentar informalmente las siguientes argumentaciones sobre la relación de tangencia entre curvas implícitas en un problema de optimización en dos variables para el caso de un valor máximo.

Consideremos el conjunto continuo de objetos con las características arriba mencionadas. Supongamos que hemos establecido la magnitud física continua $z = f(x, y) \geq 0$ definida en dicho conjunto de objetos con x y y en sus dominios físicos, y qué cumpliendo la restricción $g(x, y) = k > 0$, hemos establecido que $z = f(x, y)$ debe tener un único valor máximo. Designemos con z_m a este valor máximo y supongamos que se alcanza en el punto $M(x_m, y_m)$.

Definamos las curvas implícitas $z_m = f(x, y)$, $z^* = f(x, y)$ con z_m y z^* constantes y con $z^* < z_m$ (z^* cercano a z_m). Supongamos que $D_x y$ existe en las funciones implícitas $z^* = f(x, y)$, $z_m = f(x, y)$ y $g(x, y) = k$ en sus dominios físicos.

Apoyándonos en la Figura 1. Ubiquemos M como punto fijo sobre la curva implícita $g(x, y) = k$ (restricción). Tomemos un valor constante $z^* < z_m$ cercano a z_m. Para este z^* existen dos puntos con coordenadas diferentes $P(x_i, y_i)$ y $Q(x_d, y_d)$[6] cercanos a M que están sobre las curvas implícitas $z^* = f(x, y)$ y $g(x, y) = k$, es decir, las curvas deben interceptarse en dichos puntos.

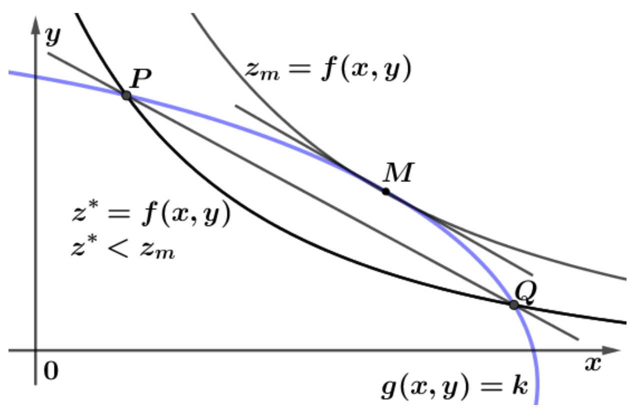

Figura 1. $z_m = f(x, y)$ tangente a $g(x, y) = k$ en M donde z alcanza su valor máximo.

Puesto que $z = f(x, y)$ es continua, si hacemos que $z^* \to z_m$ ($z^* < z_m$), las coordenadas de los puntos de intersección P y Q tienden a las coordenadas correspondiente del punto M donde se alcanza el máximo[7], de lo cual inducimos que la secante que pasa por P y Q debe tender a ser

[6] En virtud de lo establecido en ii) del esquema de inducciones de la sección 2.

[7] En virtud del inciso iii) del esquema de inducciones de la sección 2.

la tangente a $g(x,y)=k$ en el punto M, por lo que en el límite, la tangente a $z^*=z_m=f(x,y)$ es igual a la tangente a $g(x,y)=k$ en el punto M. Es decir, dichas curvas implícitas deben ser tangentes en M.

En términos de derivada, concluimos que en el punto $M(x_m,y_m)$, donde se alcanza el máximo de $z=f(x,y)$, las $D_x y$ que se pueden calcular de forma implícita en $g(x,y)=k$ y $z_m=f(x,y)$ deben ser iguales en (x_m,y_m), y estos valores proporcionan el valor máximo de z_m.

De manera similar se puede argumentar sobre la relación de tangencia entre las curvas implícitas en un problema de optimización con un mínimo en el dominio de la restricción.

4. Procedimiento de resolución con derivación implícita

En base a la argumentación de la Sección 3. articulamos el procedimiento siguiente con derivación implícita para resolver un problema de optimización elemental, así.

1. Establecer la función objetivo en dos variables a optimizar $z=f(x,y)$ y la ecuación restricción $g(x,y)=k$ (k constante) con sus dos dominios físicos correlacionados. Conjuntamente, realizar un análisis físico cualitativo para establecer la existencia del valor máximo o mínimo en cuestión.

2. Suponer que z_m es el valor qué optimiza la función objetivo en los dominios físicos, y definir la ecuación implícita $f(x,y)=z_m$, (z_m constante),

3. Calcular implícitamente $D_x y$ en $f(x,y)=z_m$, y $g(x,y)=k$.

4. Resolver para x y y el sistema formado por las dos ecuaciones encontradas en el Punto 3 y la ecuación restricción. Estos valores optimizan z,

5. Verificar que las derivadas tomen igual valor para los valores de x y y que optimizan a z.

6. Sustituir los valores de x y y en la función objetivo, para obtener el valor z_m máximo o mínimo, según lo establecido en el Punto 1.

7. Visualizar las curvas $f(x,y)=z_m$ y la restricción $g(x,y)=k$ para verificar la relación de tangencia entre ellas en el punto óptimo, y generar gráficas dinámicas de $f(x,y)=z$, variando z para visualizar la naturaleza de máximo o mínimo de z_m, y,

8. Concluir y redactar las respuestas requeridas en el problema.

5. Ejemplos ilustrativos

5.1.1 Problema 1

Encontremos las dimensiones del cono recto de mayor volumen con superficie lateral 40.

5.1.1 Resolución analítica[8]

Denotemos con x, y y z respectivamente el radio, altura y volumen del cono. Tenemos la función a optimizar $z = \frac{\pi}{3}x^2y$ y la restricción $\pi x\sqrt{x^2 + y^2} = 40$. Podemos establecer que el dominio físico para x en la restricción es $0 < x \leq \sqrt{\frac{40}{\pi}}$ y que dominio físico correlacionado correspondiente para y es $0 \leq y < \infty$. Trabajando con la representación física de los conos, en los extremos de estos dominios, establecemos, cuando $x \to 0^+, y \to \infty$ y $z \to 0^+$ (el cono tiende a degenerarse en una semirrecta de volumen cero), y cuando $x \to \left(\sqrt{\frac{40}{\pi}}\right)^-, y \to 0^+$ y $z \to 0^+$ (el cono se degenera en un disco de volumen cero). De esto intuimos que debe existir un único cono con mayor volumen que cumple la restricción.

Sea z_m el valor máximo, derivando implícitamente respecto a x en $z_m = \frac{\pi}{3}x^2y$ y en $\pi x\sqrt{x^2 + y^2} = 40$, tenemos, $0 = 2x^2 + y^2 + xyy'$ y $0 = 2y + xy'$. A partir de estas dos ecuaciones y de la ecuación restricción $\pi x\sqrt{x^2 + y^2} = 40$ obtenemos respectivamente, que el radio y altura son, $x = \sqrt{\frac{40}{\pi\sqrt{3}}} \cong 2.71$, $y = \sqrt{2}x = \sqrt{2}\sqrt{\frac{40}{\pi\sqrt{3}}} \cong 3.85$. Por lo que $z_m = \frac{\pi}{3}x^2y = \frac{40}{3\sqrt[4]{27}}\sqrt{\frac{80}{\pi}} \cong 29.51$.

Podemos verificar que $y' = -\sqrt{8}$ para ambas funciones implícitas en el punto encontrado, y dado que z debe tener máximo absoluto en los dominios de la restricción, concluimos que, el mayor volumen que puede tomar el cono con área lateral 40 es $z_m = \frac{40}{3\sqrt[4]{27}}\sqrt{\frac{80}{\pi}} \cong 29.51\ \text{u}^3$, con radio $x = \sqrt{\frac{40}{\pi\sqrt{3}}} \cong 2.71$ y altura $y = \sqrt{2}\sqrt{\frac{40}{\pi\sqrt{3}}} \cong 3.85$

[8] Aquí suponemos que el resolutor reconoce previamente, la naturaleza del problema de optimización que mencionamos arriba en este problema concreto.

5.1.2 Verificación o resolución visual aproximada

En la Figura 2 mostramos una pantalla dinámica de GeoGebra 5 (2018). Con el deslizador, al hacer que $z^* \rightarrow \cong 29.5^-$, las curvas de volumen constante cortan a la curva de restricción en dos puntos P y Q que se acercan el uno al otro y tienden hacia el punto de tangencia común M, y de la generación dinámica de valores numéricos, vemos que $x \rightarrow \cong 2.7$ y $y \rightarrow \cong 3.8$.

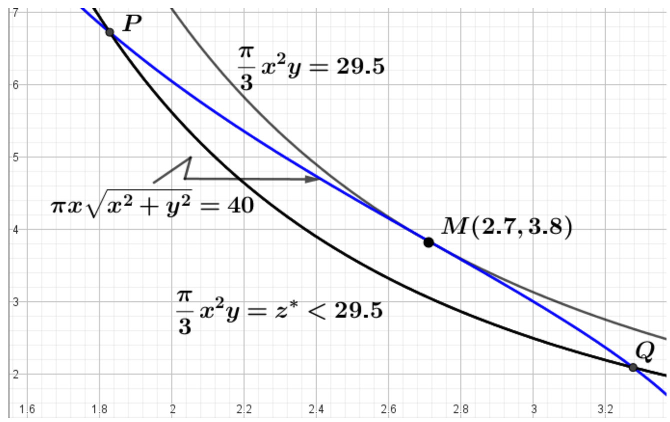

Figura 2: Pantalla de GeoGebra para aproximar la solución.

Del trabajo analítico y de la visualización de la Figura 2, concluimos, el cono con superficie lateral 40 de mayor volumen tiene radio $x \cong 2.7$, altura $y \cong 3.8$ y volumen $V \cong 29.5$ u^3.

5.2 Problema 2

Entre todos los segmentos con extremos en los ejes coordenados y que pasen por el punto $(1, 2)$ encontremos la longitud del más corto.

5.2.1 Resolución analítica

Apoyándonos en el esquema de la Figura 3.

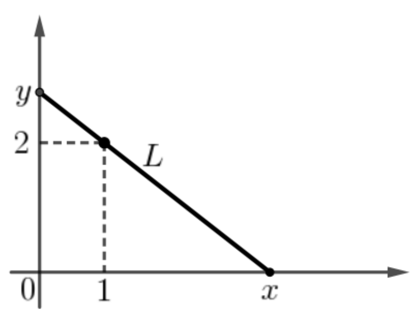

Figura 3. Representación esquemática del problema.

Con las variables indicadas. Vemos que si $x \to 1^+, y \to \infty$ y la longitud $L \to \infty$; mientras que si $x \to \infty, y \to 2^+$ y $L \to \infty$; dado que L es función continua de x y y concluimos que existe un único valor que minimiza a L en $x > 1$ y $y > 2$. La función por minimizar es $L = \sqrt{x^2 + y^2}$, la restricción geométrica de que el segmento pase por $(1, 2)$, se expresa con la restricción algebraica $(y-2)(x-1) = 2$, obtenida con relación de triángulos semejantes. Sea M el valor que minimiza L, tenemos las ecuaciones de la circunferencia $M^2 = x^2 + y^2$ y de la hipérbola $(y-2)(x-1) = 2$. Derivando implícitamente respecto a x en ellas, tenemos $2x + 2yy' = 0$ y $y - 2 + y'(x-1) = 0$. Resolviendo para x y y el sistema formado por estas dos últimas ecuaciones y la ecuación de la restricción, obtenemos $x = 1 + \sqrt[3]{4} \approx 2.58$ y $y = \frac{2}{\sqrt[3]{4}} + 2 \approx 3.25$, por lo que el valor mínimo de L es $M = \frac{\left(1+\sqrt[3]{4}\right)\sqrt{2\sqrt[3]{2}+4}}{\sqrt[3]{4}} \approx 4.16$. A manera de verificación analítica se puede comprobar que ambas curvas implícitas en el punto óptimo cumplen con $y' = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$. Usando visualización dinámica cuando $L \to\approx 4.16^+$ el cuarto de circunferencia $L = \sqrt{x^2 + y^2}$ tiende a ser tangente con la rama superior derecha de la hipérbola en el punto $(\approx 2.58, \approx 3.25)$. O bien con simulación dinámica del problema se visualiza también que la longitud mínima es M. Así, finalmente estimamos y concluimos que la longitud del segmento más corto es M.

6. Experimentación y evaluación cualitativa

Siguiendo la ruta de discusión de temas de cálculo diferencial propuesto en (Stewart, et al., 2021), con un grupo de 37 estudiantes de ingeniería[9], previo a discutir el método de derivación implícita, en dos sesiones de clase de 100 minutos, insertamos la siguiente secuencia didáctica en la que pretendíamos construir y usar el procedimiento. 1) Selección de un problema de optimización apropiado. Discusión y resolución visual dinámica del problema estableciendo la relación de tangencia entre curvas implícitas en el punto óptimo. 2) Discusión sobre el cálculo analítico de la pendiente de la tangente común a las curvas implícitas y su relación con el proceso de derivación en ecuaciones implícitas, y cálculo analítico del valor óptimo. 3) Establecimiento y justificación teórica sobre las generalidades del procedimiento seguido. 4) Elaboración y aplicación guiada del procedimiento en problemas adicionales. Y 5) Discusión y practica del

[9] Notamos que participaron algunos estudiantes que ya tenían conocimiento del procedimiento tradicional. Tal aspecto no fue considerado en la experiencia.

proceso de derivación implícita y cálculo de pendientes de tangentes en curvas implícitas sin referentes concretos para las variables.

Continuando con el orden temático del texto mencionado, tres semanas después, trabajamos en aproximadamente durante dos sesiones de clase de 100 minutos el procedimiento tradicional de optimización propuesto en (Stewart et al., 2021, p. 336), exigiendo al estudiante resolver con ayuda guiada problemas de optimización siguiendo este procedimiento. Luego solicitamos al estudiante resolver con ayuda guiada un problema seleccionado usando ambos procedimientos, al final realizamos una breve reflexión comparativa de los procedimientos.

Dos días después, en una prueba parcial sobre optimización (sin el uso del GeoGebra), sin mencionarles ni exigirles el procedimiento a usar, observamos que aproximadamente un 45% de estudiantes evaluados utilizó el procedimiento de derivación implícita, de los cuales aproximadamente un 35% logró aplicarlo con cierto éxito. Mientras que observamos un éxito de cerca de un 50% para el método tradicional. Mencionamos algunas observaciones sobre su aprendizaje en el siguiente apartado.

7. Discusión y algunas conclusiones

Desde la pedagogía de problemas de optimización elemental de ingeniería, podemos señalar algunas bondades del procedimiento propuesto. Su enfoque promueve la aplicación de los conceptos de pendiente de recta tangente en curvas implícitas (geométrico) y de derivación implícita (analítico) en la solución de problemas aplicados, temas de aplicación ausentes en cursos habituales. Enfatiza el hecho de optimizar una función sujeta a una restricción, este hecho es la esencia en muchos problemas de optimización en ingeniería, además los problemas de optimización de varias variables se modelan bajo dicha característica (Black, 1997). Comparado con el procedimiento tradicional de optimización, al reducir el problema a optimizar una función de una variable dicha característica esencial queda oculta. El trabajo dinámico visual con GeoGebra en el plano que proponemos, puede contribuir a comprender la génesis del procedimiento de multiplicadores de Lagrange en problemas de optimización más generales que se estudian en cálculo de varias variables como lo dejan entrever Choi (2015), y Valenzuela y Barrantes (2018) Con el procedimiento se pueden resolver problemas donde la función a optimizar no se puede expresar como una función de una variable, así, el procedimiento ofrece una alternativa útil al procedimiento tradicional de una variable (Black, 1997). El procedimiento permite vincular las relaciones físico-concretas con sus representaciones simbólicas en el problema, situación que se oculta con el procedimiento tradicional. Finalmente, el procedimiento justifica de manera natural una necesidad en estudiante de aprender el contenido de derivación implícita.

En la experiencia y evaluación cualitativa mencionada, observamos que hay estudiantes que prefieren y aplican con soltura y adecuada comprensión el procedimiento, y manifiestan sensación de comprensión al apoyarse de visualizaciones dinámicas con GeoGebra de las curvas implícitas.

En relación dificultades de aprendizaje, observamos. La comprensión aceptable del esquema general de problemas de optimización, y su adecuada articulación con la propiedad de tangencia entre curvas implicadas y el proceso de derivación implícita en el procedimiento no lograron alcanzarlo varios estudiantes. El manejo y control sobre la covariación relacionada de dos variables dificultó la solución con adecuada comprensión de algunos problemas propuestos. Establecer la restricción representó una dificultad, principalmente en problemas donde ésta no se menciona de manera explícita. Y, algunos estudiantes evadieron su uso por dificultades con el proceso analítico de derivación implícita.

Sobre el rigor en el proceso de optimización que mencionan Malaspina y Font (2010), la argumentación y justificación analítica de valor óptimo presenta dificultades y no se puede realizar a nivel de cursos de cálculo elemental.

En cuanto a los contenidos del curso, para su puesta en acción satisfactoria en el aula, se requiere alterar la secuencia de enseñanza habitual para poder ubicarla más apropiadamente, y representa una carga adicional de enseñanza y aprendizaje.

Finalmente. Sugerimos apoyarlo con visualizaciones dinámicas. Recomendamos su presentación como una justificación de aprendizaje y aplicación de derivación implícita. Sugerimos su uso reflexivo como procedimiento alternativo y/o complementario al procedimiento tradicional de optimización de problemas de una variable, y recomendamos su uso experimental controlado y evaluado, para determinar sus potencialidades, limitaciones o conflictos didácticos que puedan generarse.

8. Referencias

Black, K. (1997). Classrom Note: Putting Constraints in Optimization for First-Year Calculus Students. *SIAM Review*, *39*(2), 187-374. https://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/S0036144595294813?download=tru

GeoGebra (2018). GeoGebra Classic 6 (Versión 6.0.518.0) [Software]. GeoGebra GmbH. https://www.geogebra.org/classic

Grande, A. & Vazquez, V. (1014). Resolução de Problemas de Otimização com o Auxílio do Software. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, (*3*) 23-34.

Helfgott, M. (2023). *Calculus for the Natural Sciences* (1ra ed.). Society for Indusgtrial and Applied Mathematics.

Luna, M. & Barrantes, E. (2018). Resolución de problemas de optimización de funciones reales en varias variables asistido por el GeoGebra. *Acta Latinoamérica de Matemática Educativa*, *31*(2), 1892-1900.

Malaspina, U. & Font, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimización problems. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(1), 10.1007/s10649-010-9243-8.

Malaspina, U. (2004). Problemas de optimización y pensamiento matemático. *Acta latinoamericana de matemática educativa, A.C.*, 17, 936-931.

OpenAI (2022). ChatGPT 3.5 [Software], OpenAI. https://openai.com/

Stewart, J., Clegg, D. & Watson, S. (2021). *Calculo Trascendentes Tempranas* (9na ed.). Cengage Learning Editores S.A.

Tikhomirov, V. (1990). *Stories about Maxima and Mínima*. American Mathematical Society.

Villegas, J., Castro, E. & Gutiérrez, J. (2009). Representations in problem solving: a case study with optimization problems. *Electrónic Jounal of Research in Educational Psychology, 7*(1), p. 279-308.