

# Una mirada de la Serie de Taylor mediante un sistema de referencia variacional en contexto de predicción en circuitos eléctricos

*El Cálculo y su Enseñanza.*

ISSN: 2007-4107 (electrónico)

Francisco Agustín Zúñiga Coronel

Universidad de Los Altos de  
Chiapas  
México

[maestro\\_coronel@hotmail.com](mailto:maestro_coronel@hotmail.com)

*Recibido: 15 enero de 2022*

*Aceptado: 25 noviembre de 2022*

*Autor de Correspondencia:*

Francisco Agustín Zúñiga Coronel



**Resumen.** Este trabajo presenta un análisis histórico-epistemológico de un concepto matemático llamado Serie de Taylor. Se analiza la demostración planteada en la obra original de Brook Taylor mediante un sistema de referencia variacional. Se parte de la problemática sobre el tratamiento de la Serie de Taylor a través de la convergencia. El estudio se enmarca en el Pensamiento y Lenguaje Variacional desde dos nociones: causalidad y temporización. Como aspectos metodológicos se consideran tres etapas. La primera se refiere a la relación entre variables y al reconocimiento de estados intermedios. Seguido del análisis de órdenes de variación y la variación sucesiva. Por último, se analiza la Serie de Taylor en contexto de predicción en circuitos eléctricos. En el análisis se identifican prácticas variacionales: comparación, seriación y predicción. Y aspectos de la variación: carácter estable del cambio, órdenes de variación y variación sucesiva.

**Palabras clave:** Serie de Taylor, sistema de referencia variacional, circuitos eléctricos.

**Abstract.** This paper presents a historical-epistemological analysis of a mathematical concept called the Taylor Series. The proof proposed in the original work of Brook Taylor is analyzed by means of a variational reference system. It starts from the problem about the treatment of the Taylor Series through convergence. The study is framed in Variational Thought and Language from two notions: causality and timing. Three stages are considered as methodological aspects. The first refers to the relationship between variables and the recognition of intermediate states. Followed by variance order analysis and successive variance. Finally, the Taylor Series is analyzed in the context of prediction in electrical circuits. Variational practices are identified in the analysis: comparison, seriation and prediction. And aspects of the variation: stable character of the change, orders of variation and successive variation.

**Keywords.** Taylor series, variational reference system, electrical circuits.

# 1. Introducción

El Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar) puede desarrollarse con el estudio de algunos conceptos matemáticos como variable, función, pendiente, derivada, integral, ecuación diferencial, binomio de Newton, Serie de Taylor. Cada uno de estos conceptos tiene una génesis histórica, siendo posible la problematización del saber matemático con un análisis histórico-epistemológico (Hernández y Cantoral, 2018). Por tanto, el propósito es analizar una construcción de la Serie de Taylor en la obra original de Brook Taylor, donde se reconozcan elementos de un sistema de referencia variacional que permitan el uso de la serie en el contexto de circuitos eléctricos. La Serie de Taylor se reconoce en el siglo XVII con los trabajos de Newton, específicamente, con su binomio que se refiere al desarrollo de series de potencias con exponentes fraccionarios (Cantoral, 1990).

En la obra original de Taylor (1717) se establece una demostración de la serie que lleva su nombre. La Serie de Taylor, según Struik (1986), ya se conocía con los trabajos de Gregory, pero Taylor plantea una demostración publicada en su obra *Methodus Incrementorum Directa & Inversa* (figura 1).

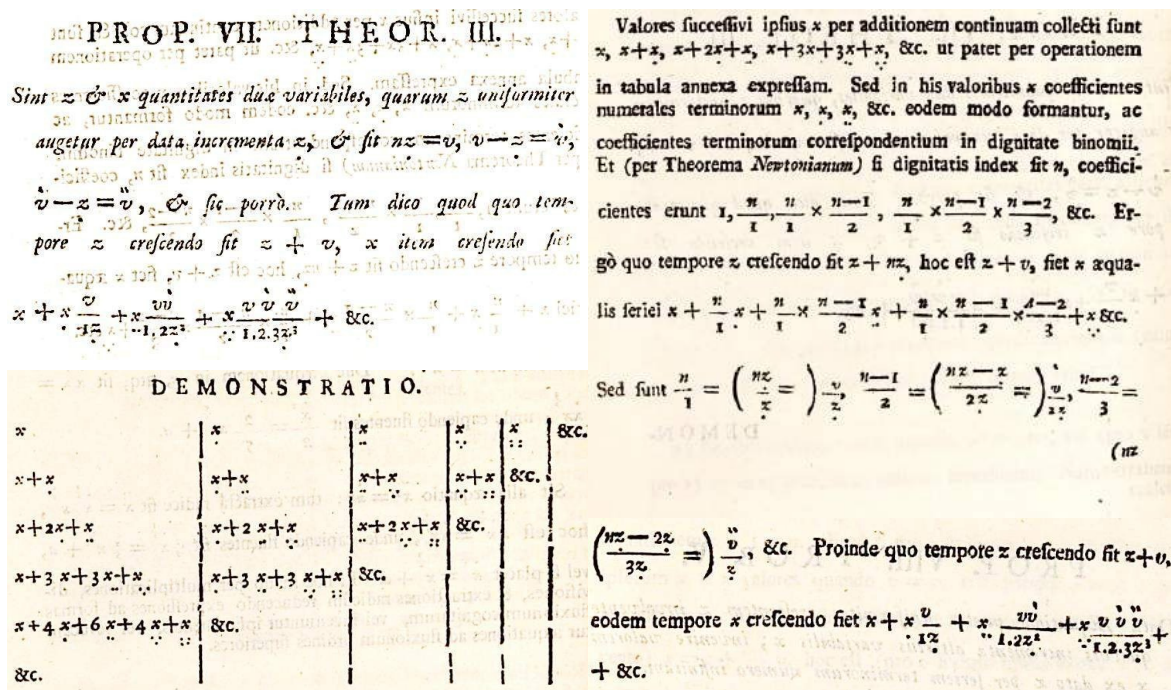


Figura 1. Obra original de Brook Taylor.

Fuente: Taylor (1717, pp. 21-23)

Las investigaciones de la Serie de Taylor son diversas, tal es el caso del estudio de Cantoral (1990) donde analiza las circunstancias que hacen posible la construcción de conocimiento matemático con el estudio de fenómenos de flujo continuo en la naturaleza. El autor aporta elementos para la construcción del *Prædicere* y reconoce la Serie de Taylor como el instrumento predictor. En el trabajo de Arcos (1993) se plantea la Serie de Taylor como una herramienta de predicción cuando se modelan fenómenos de variación continua en diversos campos de estudio: electricidad y magnetismo, mecánica de fluidos, termodinámica, máquinas y mecanismos, resistencias de materiales. Deluque-Gómez, Arcon-Osorio y Cubillán-Acosta (2018) predicen comportamientos de sistemas moleculares, con el análisis de ecuaciones generalizadas de diferencias finitas basadas en series de Taylor para el cálculo de propiedades ópticas no lineales.

En el estudio de Hernández (2006) se realiza una reconstrucción de la Serie de Taylor a partir del binomio de Newton. En la investigación de Muñoz (2006) se reconoce a la predicción como lo conceptual y a la variación sucesiva como lo algorítmico. Establece que la integración de estas nociones permite una reconstrucción de la Serie de Taylor. En el trabajo de Morales (2009) y de Almazán (2009) se presentan resignificaciones de la Serie de Taylor en una situación de modelación de movimiento con el análisis de gráficas. Por su parte, Zúñiga (2022) plantea una resignificación didáctica de la Serie de Taylor en contexto de predicción en circuitos eléctricos. El estudio de la variación en el contexto de circuitos eléctricos mediante un sistema de referencia variacional se realiza en Zúñiga (2020). En dicho trabajo se estudia el comportamiento de la carga eléctrica en un circuito eléctrico con un led y con un capacitor, respectivamente.

En la investigación de Bayés y Costa (2022) se presenta un tratamiento gráfico de la Serie de Taylor para aproximar funciones (exponenciales, trigonométricas y logarítmicas) en un punto dado. Este tratamiento se centra en la convergencia, es decir, a mayor grado del polinomio mejor es la aproximación. En el contexto escolar se reconoce la problemática sobre la aproximación de funciones por medio de polinomios en un punto específico (Morales, 2009). Para dicha aproximación se hace uso de reglas de derivación y de procesos algebraicos, donde el significado se reduce a su operatividad (Cantoral, 2019). Estos procesos algebraicos provocan que las ideas variacionales queden ocultas y el estudio de fenómenos de flujo continuo limitado.

Como se mencionó anteriormente, la Serie de Taylor tiene su desarrollo a partir del siglo XVII al considerarse como el instrumento predictor con el estudio de fenómenos de variación continua. Este desarrollo nos direcciona a una reflexión de la Historia de las Matemáticas (HM) en el ámbito educativo. Por tanto, es de interés incorporar la HM en la formación del profesor para su práctica docente. De acuerdo con Nápoles (2015) “la Historia ofrece a los profesores la oportunidad de replantearse sus ideas sobre la naturaleza de los conceptos matemáticos y en los procesos de construcción de estos conceptos” (p. 253). La HM se propone como una herramienta de enseñanza de los conceptos. Como señala Anacona (2003), los aportes de la HM posibilitan una mejor comprensión, influye en la formación de profesores y en los procesos de aprendizaje, permite el diseño de actividades didácticas, hace un conocimiento didáctico del contenido histórico de las matemáticas y permite un estudio histórico – epistemológico. Torres, Guacaneme y Arboleda (2014) establecen la relación de la HM con la educación del profesor de matemáticas. Con el objetivo de incorporar la HM en las actividades matemáticas en el aula que sean diseñadas e implementadas por los profesores. Con la intención de motivar y contextualizar los objetos matemáticos.

Con base en lo anterior se retoma la HM desde un estudio histórico-epistemológico que permita el análisis de la demostración de la Serie de Taylor y de un fenómeno de variación continua en contexto de predicción en circuitos eléctricos (comportamiento del voltaje de carga en un capacitor). Donde el estudio del cambio y la variación dota de significados a los objetos matemáticos (Pérez, 2019). Entonces, en este trabajo se estudia la demostración de la Serie de Taylor a través de la variación, donde se aborda la pregunta: *¿qué elementos del sistema de referencia variacional (causalidad, temporización, prácticas variacionales, carácter estable del cambio, órdenes de variación, variación sucesiva) se reconocen en la demostración de la Serie de Taylor en contexto de predicción en circuitos eléctricos?* Con el objetivo de reconocer relación entre variables y estados intermedios, prácticas variacionales y aspectos de la variación.

## 2. Referentes teóricos

El PyLVar es una línea de investigación y una forma de pensamiento que “consiste en las formas de pensar, argumentar, organizar, tratar y comunicar matemáticamente fenómenos de cambio” (Caballero y Moreno, 2017, p. 1067). El cambio y la variación son elementos del PyLVar, que de acuerdo con Caballero y Cantoral (2017), “el cambio consiste en toda modificación de estado (posición, forma, altura, peso, etc.), en tanto que la variación se asume como una cuantificación particular de dicho cambio” (p. 1058). Entonces, la variación se considera como la cuantificación del cambio y su comportamiento.

Se establece que, “todo cambio se expresa a través de estados, pero la diferencia entre estados puede ser medida con la diferencia entre valores de la variable elegida” (Cantoral, 2019, p. 43). Esta diferencia permite reconocer el *¿cuánto cambia?*, con la siguiente expresión

$$f(x + h) - f(x)$$

Dicha expresión representa la variación, donde los cambios que se dan son:

Cambio en la variable independiente

$$x_0 \text{ a } x_0 + h$$

Cambio en la variable dependiente

$$f(x_0) \text{ a } f(x_0 + h)$$

El PyLVar se desarrolla a partir de las ideas de Newton (1643 - 1727). En estas ideas se presenta la noción del *Prædicere* como la acción y efecto de predecir el estado ulterior de acuerdo al estado de facto (estado inicial), con el reconocimiento de patrones de regularidad que permiten reconocer al todo solo con mirar la parte (Cantoral, 1990). El *Prædicere* es lo que orienta, al ser humano, a querer predecir. La *predicción* es una práctica variacional que “consiste en determinar el valor futuro  $f(x + h)$  conociendo el valor actual  $f(x)$  y su variación” (Cantoral, 2019, p. 111). Donde  $x$  (variable independiente) representa el estado actual y  $x + h$  el estado posterior. Como señala Caballero (2018), la predicción “consiste en la acción de anticipar un estado o valor

específico de una variable, sea futuro o anterior a los datos que se tienen” (p. 58). Esto implica el reconocimiento de algún patrón o regularidad en el comportamiento del cambio, denominado como el *carácter estable del cambio* (*¿cómo cambia?*).

Las nociones de causalidad y de temporización permiten estudiar la evolución del cambio, su cuantificación, el carácter estable del cambio y los órdenes de variación (Cantoral, Moreno y Caballero, 2018). Estas nociones conforman un sistema de referencia variacional. La *causalidad* se refiere en reconocer la relación entre dos variables (*¿qué cambia?* y *¿respecto de qué cambia?*) que intervienen en un fenómeno, es decir, los cambios en una variable afectan la otra. La *temporización* consiste en el reconocimiento de estados intermedios de un fenómeno que permita el análisis de su evolución. Estos estados intermedios se pueden reconocer con procesos de medición en el fenómeno de variación continua.

El *sistema de referencia variacional* explica la forma en cómo las personas perciben y organizan el cambio y la variación, para su estudio mediante prácticas variacionales: comparación, seriación y predicción (Caballero y Cantoral, 2017). En el trabajo de Reyes, Palmeri y Cantoral (2019) se toma en cuenta la evolución de estas prácticas que comienza en comparar, siguiendo con seriar, para luego predecir. La *comparación* permite establecer diferencias entre un estado posterior y uno anterior, es decir, identificar qué estado es mayor, menor o igual. La *seriación* analiza dos o más comparaciones con la intención de reconocer el carácter estable del cambio. Y la predicción en anticipar el estado de una variable.

Los *órdenes de variación* son cambios en los estados de la variable y en sus variaciones, que se determinan a partir de diferencias. El primer orden de variación son diferencias entre estados de la variable. El segundo orden son diferencias entre las primeras variaciones. El tercer orden son diferencias entre las segundas variaciones y así sucesivamente. La *variación sucesiva* es la articulación de dos o más órdenes de variación, donde se reconozca el carácter estable del cambio (*¿cómo cambia?*) para predecir estados futuros de un fenómeno de flujo continuo. Por tanto, todo lo anterior se sintetiza en el diagrama de la figura 2.

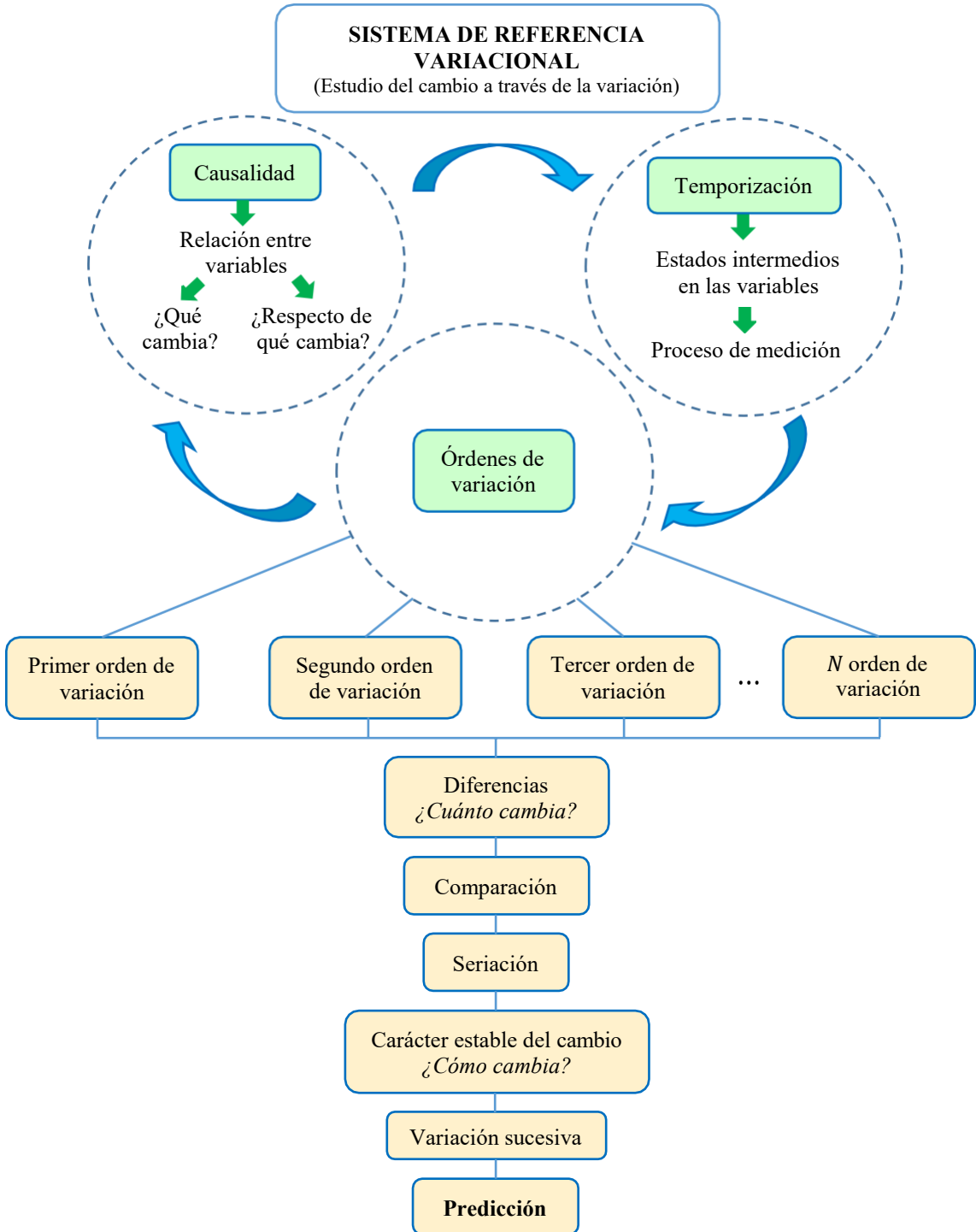


Figura 2. Elementos de un sistema de referencia variacional con base en prácticas.

Fuente: Adaptado de Zúñiga (2022, p. 188)

### 3. Aspectos metodológicos

Como aspectos metodológicos se plantea un análisis histórico-epistemológico, ya que como señalan Romero, Rodríguez y Henaó (2017) permite reconocer circunstancias que hacen posible la construcción del conocimiento matemático al analizar conceptos que subyacen en las obras originales y se articulan para fomentar significados. El estudio se realiza siguiendo el diagrama de la figura 2. El diagrama es una guía para el análisis que muestra un proceso cíclico que comienza con la relación entre variables seguido del reconocimiento de estados intermedios y el análisis de órdenes de variación. El fenómeno de variación continua puede permitir, en primera instancia, el análisis de un primer orden de variación. Si el análisis queda limitado regresamos a la causalidad y repetimos el ciclo con un segundo orden de variación y así sucesivamente. La investigación es documental con base en la revisión de la literatura. El trabajo se divide en tres etapas: la primera con la intención de reconocer la relación entre variables e identificar estados intermedios. La segunda en el análisis de órdenes de variación y la variación sucesiva. Por último, se hace uso de la Serie de Taylor en contexto de predicción en circuitos eléctricos.

### 4. Análisis histórico-epistemológico de la Serie de Taylor mediante un sistema de referencia variacional

La demostración de la Serie de Taylor se establece en la obra original de Brook Taylor, en 1717. En esa época, el conocimiento matemático estaba influenciado por las ideas de Newton. La obra original de Newton se publica en 1687, titulada *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Donde se establece que:

Los fenómenos de flujo en particular poseen herencia [...] el estado ulterior  $P + PQ$  del fenómeno de variación depende completamente de las circunstancias que caracterizan el estado de facto  $P$ , la evolución de un sistema está completamente determinado por sus variaciones primeras [...] en el caso del movimiento de un fluido,  $P$  es el estado inicial del fuente continuo, en la cual queremos predecir el estado  $P + PQ$  del fenómeno, entonces:  $P \rightarrow P + PQ$ , donde  $PQ$  es la variación de la variable dependiente, con esta idea y en la necesidad social de predecir, conocer, adelantar, Newton descubrió el binomio que hoy día lleva su nombre [...] (Hernández, 2005, p. 525).



Lo anterior indica que en el estudio de fenómenos de variación continua es de interés predecir estados futuros al analizar el comportamiento de las variables. Como señala Pérez (2019), en la obra el conocimiento se basaba en ideas predictivas para el estudio de fenómenos flujo continuo, donde Newton buscaba modelar y predecir fenómenos naturales. Según Hernández (2005) establece que, “el binomio de Newton y la serie de Taylor son vistas como instrumentos de predicción en un contexto de variación” (p. 525). Estas ideas se retoman para el análisis de la demostración de la Serie de Taylor mediante un sistema de referencia variacional. A continuación, se presentan las tres etapas planteadas.

### Etapa A.

Al inicio de la demostración, Taylor establece que  $x$  y  $z$  son cantidades variables que están relacionadas (figura 3).

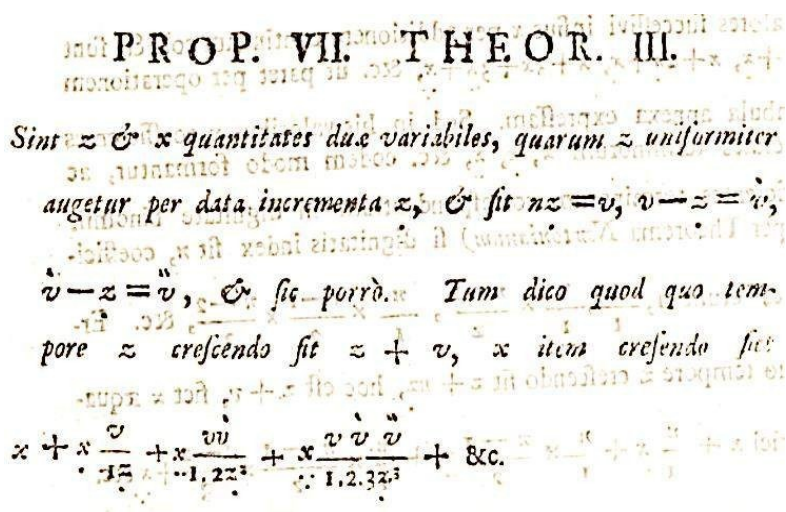


Figura 3. Relación entre variables

De acuerdo con Struik (1986) la cantidad  $z$  se incrementa uniformemente con valores dados. Si consideramos que  $z$  representa la variable tiempo y realizamos algunas mediciones, entonces al comienzo  $z = 0$ . Si las mediciones se realizan cada 3 segundos obtenemos los siguientes estados

$$0, \quad 3, \quad 6, \quad 9, \quad 12, \quad 15, \quad \dots$$

Es decir, el tiempo se incrementa uniformemente cada 3 segundos. Esto implica un primer orden de variación y el reconocimiento del carácter estable del cambio (cómo cambia) en la variable  $z$ .

Se establece que la cantidad  $x$  crece mediante la evolución de sus variaciones. Se observa que  $x$  depende de los valores de  $z$ . Entonces, la noción de causalidad se reconoce al argumentar que  $x$  cambia respecto de  $z$ . Esta relación entre dos variables puede permitir el análisis de fenómenos en diversos contextos y corresponde al concepto de relación funcional.

**Etapa B.**

Para la siguiente etapa analizamos la primera columna que corresponde a los estados de la variable  $x$  (ver figura 4). El  $E_0$  corresponde al estado inicial de  $x$ . Los demás son estados futuros (posteriores). Esto implica el reconocimiento de estados intermedios en la variable  $x$ .

**D E M O N S T R A T I O .**

$E_0$	$x$	$x$	$x$	$x$	$x$	$\&c.$
$E_1$	$x+x$	$x+x$	$x+x$	$x+x$	$x+x$	$\&c.$
$E_2$	$x+2x+x$	$x+2x+x$	$x+2x+x$	$x+2x+x$	$\&c.$	
$E_3$	$x+3x+3x+x$	$x+3x+3x+x$	$\&c.$			
$E_4$	$x+4x+6x+4x+x$	$\&c.$				
$\vdots$						
$E_n$	$\&c.$					

Figura 4. Estados de la variable  $x$

Si la variable  $x$  solo tiene un estado quiere decir que no sufre un cambio, entonces no hay variación. Si la variable  $x$  tiene dos estados hay un cambio de  $E_0$  a  $E_1$ , entonces se reconoce un primer orden de variación. El cambio se puede calcular con la diferencia del estado posterior menos el estado anterior

$$E_1 - E_0$$

Aquí podemos realizar una comparación entre los estados. Si  $E_1$  es mayor que  $E_0$  se obtiene un valor positivo. Esto significa que la variable se incrementa (aumenta). Si  $E_1$  es menor que  $E_0$  se obtiene un valor negativo. Esto significa que la variable tiene un decremento (disminuye).

Si la variable  $x$  tiene tres estados hay dos cambios, de  $E_0$  a  $E_1$  y de  $E_1$  a  $E_2$ . Sus diferencias son

$$E_1 - E_0 \quad \text{y} \quad E_2 - E_1$$

Estas diferencias corresponden al primer orden de variación. Si tenemos dos cambios podemos calcular su diferencia

$$[E_2 - E_1] - [E_1 - E_0]$$

Que corresponde a un segundo orden de variación.

Entonces, podemos realizar una comparación entre los estados. Si  $[E_2 - E_1]$  es mayor que  $[E_1 - E_0]$  se obtiene un valor positivo. Esto significa que la primera variación se incrementa (aumenta). Si  $[E_2 - E_1]$  es menor que  $[E_1 - E_0]$  se obtiene un valor negativo. Esto significa que la primera variación tiene un decremento (disminuye).

Si la variable  $x$  tiene cuatro estados hay tres cambios, de  $E_0$  a  $E_1$ , de  $E_1$  a  $E_2$  y de  $E_2$  a  $E_3$ . Sus diferencias son

$$E_1 - E_0 \quad , \quad E_2 - E_1 \quad \text{y} \quad E_3 - E_2$$

Al tener tres cambios podemos calcular las segundas diferencias

$$[E_2 - E_1] - [E_1 - E_0] \quad \text{y} \quad [E_3 - E_2] - [E_2 - E_1]$$

Que corresponden a un segundo orden de variación. Como tenemos dos segundas diferencias podemos calcular una tercera

$$\{[E_3 - E_2] - [E_2 - E_1]\} - \{[E_2 - E_1] - [E_1 - E_0]\}$$

Que corresponde a un tercer orden de variación. Y así sucesivamente.

Aquí también se puede realizar una comparación entre los estados. Si  $\{[E_3 - E_2] - [E_2 - E_1]\}$  es mayor que  $\{[E_2 - E_1] - [E_1 - E_0]\}$  se obtiene un valor positivo. Esto significa que la segunda variación se incrementa (aumenta). Si  $\{[E_3 - E_2] - [E_2 - E_1]\}$  es menor que  $\{[E_2 - E_1] - [E_1 - E_0]\}$  se obtiene un valor negativo. Esto significa que la segunda variación tiene un decremento (disminuye). Al tener varias comparaciones podemos analizarlas en conjunto (seriación) para reconocer el carácter estable del cambio (cómo cambia). Si todas las comparaciones indican un incremento, entonces la variable o el orden de variación aumenta en

un intervalo de tiempo. Si todas las comparaciones indican un decremento, entonces la variable o el orden de variación disminuye en ese intervalo.

Por tanto, si tenemos  $n$  estados de la variable  $x$  podemos analizar  $n - 1$  órdenes de variación. Esto se muestra en la figura 4 al observar los estados:  $E_0, E_1, E_2, E_3$  y  $E_4$ . Como tenemos cinco estados podemos analizar cuatro órdenes de variación de la cantidad variable  $x$ . Observamos que

- $\overset{\cdot}{x}$  Significa la primera variación de  $x$
- $\overset{\cdot\cdot}{x}$  Significa la segunda variación de  $x$
- $\overset{\cdot\cdot\cdot}{x}$  Significa la tercera variación de  $x$
- $\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{x}$  Significa la cuarta variación de  $x$

En notación actual se representa

- $\overset{\cdot}{x} \longrightarrow \Delta x$
- $\overset{\cdot\cdot}{x} \longrightarrow \Delta^2 x$
- $\overset{\cdot\cdot\cdot}{x} \longrightarrow \Delta^3 x$
- $\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{x} \longrightarrow \Delta^4 x$

Ahora bien, al considerar los cinco estados de  $x$  con sus órdenes de variación podemos proceder con lo planteado en la tabla 1.

**Tabla 1**

*Desarrollo algebraico*

Notación en la obra original	Desarrollo en notación actual
$x$	$x$
$x + \underset{\cdot}{x}$	$x + \Delta x$
$x + 2 \underset{\cdot}{x} + \underset{\cdot\cdot}{x}$	$\Delta x + \Delta^2 x$ $\underline{x + \Delta x}$ $x + 2\Delta x + \Delta^2 x$
$x + 3 \underset{\cdot}{x} + 3 \underset{\cdot\cdot}{x} + \underset{\cdot\cdot\cdot}{x}$	$\Delta^2 x + \Delta^3 x$ $\underline{\Delta x + \Delta^2 x}$ $\Delta x + 2 \Delta^2 x + \Delta^3 x$ $\underline{x + 2\Delta x + \Delta^2 x}$ $x + 3\Delta x + 3 \Delta^2 x + \Delta^3 x$
$x + 4 \underset{\cdot}{x} + 6 \underset{\cdot\cdot}{x} + 4 \underset{\cdot\cdot\cdot}{x} + \underset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{x}$	$\Delta^3 x + \Delta^4 x$ $\underline{\Delta^2 x + \Delta^3 x}$ $\Delta^2 x + 2\Delta^3 x + \Delta^4 x$ $\underline{\Delta x + 2\Delta^2 x + \Delta^3 x}$ $\Delta x + 3\Delta^2 x + 3\Delta^3 x + \Delta^4 x$ $\underline{x + 3\Delta x + 3\Delta^2 x + \Delta^3 x}$ $x + 4\Delta x + 6\Delta^2 x + 4\Delta^3 x + \Delta^4 x$

El triángulo aritmético considerado como el “triángulo de Pascal” establece los coeficientes del desarrollo de la potencia de un binomio con exponentes enteros positivos (Galo, 2020). Los coeficientes de la tabla 1 corresponden al desarrollo de un binomio. Por ejemplo

$$(x + \Delta x)^0 = 1$$

$$(x + \Delta x)^1 = 1 \cdot x + 1 \cdot \Delta x$$

$$(x + \Delta x)^2 = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta x^2$$

$$(x + \Delta x)^3 = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot \Delta x + 3 \cdot x \cdot \Delta x^2 + 1 \cdot \Delta x^3$$

Los coeficientes de cada término corresponden al triángulo de Pascal, como se muestra en la figura 5.

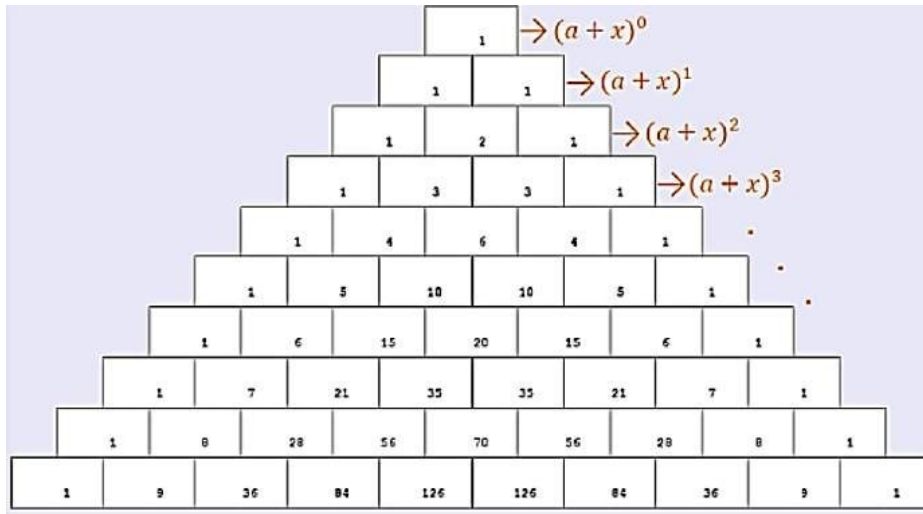


Figura 5. Triángulo de Pascal.

Fuente: Galo (2020, p. 79)

El triángulo de Pascal se relaciona con el binomio de Newton

$$(P + PQ)^{n/m} = P^{n/m} + \frac{n}{m}AQ + \frac{n-m}{2m}BQ + \frac{n-2m}{3m}CQ + \frac{n-3m}{4m}DQ + \dots$$

Donde:

$$A = P^{n/m}, \quad B = \frac{n}{m}AQ, \quad C = \frac{n-m}{2m}BQ, \quad D = \frac{n-2m}{3m}CQ, \quad E = \frac{n-3m}{4m}DQ, \quad \dots$$

Al considerar que

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{y} \quad m = 1$$

Obtenemos

$$(P + PQ)^n = P^n + \frac{n}{1}AQ + \frac{n-1}{2}BQ + \frac{n-2}{3}CQ + \frac{n-3}{4}DQ + \dots$$

$$A = P^n, \quad B = n \cdot AQ, \quad C = \frac{n-1}{2}BQ, \quad D = \frac{n-2}{3}CQ, \quad E = \frac{n-3}{4}DQ, \quad \dots$$

Si retomamos  $(x + \Delta x)^3$  y hacemos uso del binomio de Newton obtenemos lo siguiente

$$P = x, \quad PQ = \Delta x, \quad Q = \frac{\Delta x}{P} = \frac{\Delta x}{x}$$

Entonces

$$(x + \Delta x)^3 = x^3 + 3 \cdot x^3 \cdot \frac{\Delta x}{x} + 3 \cdot \frac{3-1}{2} \cdot x^3 \cdot \frac{\Delta x}{x} \cdot \frac{\Delta x}{x} + 3 \cdot \frac{3-1}{2} \cdot \frac{3-2}{3} \cdot x^3 \cdot \frac{\Delta x}{x} \cdot \frac{\Delta x}{x} \cdot \frac{\Delta x}{x}$$

$$(x + \Delta x)^3 = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot \Delta x + 3 \cdot x \cdot \Delta x^2 + 1 \cdot \Delta x^3$$

Nos genera los mismos coeficientes planteados en el triángulo de Pascal. Por tanto, podemos considerar al binomio de Newton como una generalización de los estados futuros de la variable. El binomio de Newton establece un estado inicial donde los términos siguientes se forman con el término anterior. En la demostración (figura 6) se establece que el binomio de Newton expresa los coeficientes de  $x$  y sus variaciones de la siguiente forma

$$1 \cdot x + n \cdot \Delta x + \frac{(n)(n-1)}{2} \cdot \Delta^2 x + \frac{(n)(n-1)(n-2)}{6} \cdot \Delta^3 x \dots \quad (1)$$

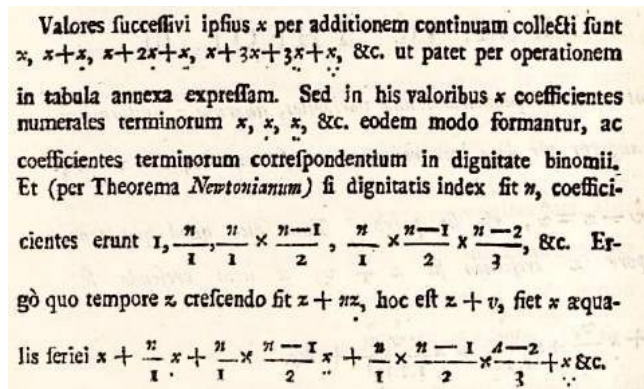


Figura 6. El binomio de Newton y sus variaciones

En la figura 7 se plantea que

$$n\Delta z = v$$

$$\frac{n}{1} = \left[ \frac{n\Delta z}{\Delta z} \right] = \frac{v}{\Delta z}$$

$$\frac{n-1}{2} = \left[ \frac{n\Delta z - \Delta z}{2\Delta z} \right] = \frac{\dot{v}}{2\Delta z}$$

$$\frac{n-2}{3} = \left[ \frac{n\Delta z - 2\Delta z}{3\Delta z} \right] = \frac{\ddot{v}}{3\Delta z}$$

$$\frac{n-3}{4} = \left[ \frac{n\Delta z - 3\Delta z}{4\Delta z} \right] = \frac{\ddot{\ddot{v}}}{4\Delta z}$$

Por lo tanto, al sustituir en (1) reconstruimos la Serie de Taylor. Esta serie señala que, cuando  $z$  crece en  $z + v$ ,  $x$  crece en

$$x + \Delta x \frac{v}{1 \cdot \Delta z} + \Delta^2 x \frac{v\dot{v}}{1 \cdot 2 \cdot (\Delta z)^2} + \Delta^3 x \frac{v\dot{v}\ddot{v}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (\Delta z)^3} + \Delta^4 x \frac{v\dot{v}\ddot{\ddot{v}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (\Delta z)^4} + \dots$$

Se puede observar que el primer término ( $x$ ) es el valor inicial. El segundo término es su primera variación, el tercer término corresponde a la segunda variación y así sucesivamente. Se reconoce que existe una razón de cambio entre variable  $x$  respecto a la variable  $z$ . Por tanto, la Serie de Taylor queda expresada en variaciones sucesivas de las cantidades variables  $x$  y  $z$  (figura 7).

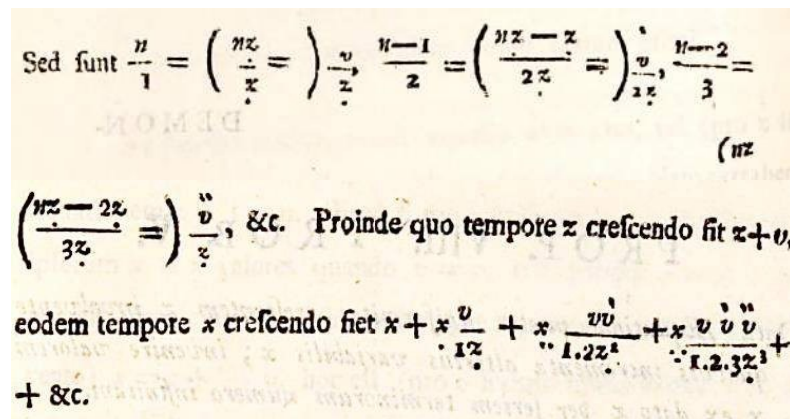


Figura 7. Reconstrucción de la Serie de Taylor



Esta etapa tiene la intención de aportar elementos para el diseño de actividades centradas en la reconstrucción de la Serie de Taylor a partir de diferencias, seguido de los órdenes de variación, el triángulo de Pascal y el binomio de Newton.

### Etapa C.

En esta etapa se analiza la Serie de Taylor en contexto de predicción en circuitos eléctricos. Se retoman algunos datos obtenidos de un experimento con un circuito eléctrico RC (resistencia-capacitor), como se muestra en la tabla 1.

**Tabla 1**

*Datos del experimento*

Tiempo (en segundos)	Voltaje de carga (en volts)
0	0
5	1.29
10	2.15
15	2.88
20	3.37

Fuente: Datos retomados de Zúñiga, Muñoz y Morales (2021, p. 85)

En el experimento se reconoce la relación entre dos variables: el voltaje de carga del capacitor cambia respecto al tiempo. Al realizar la medición con un multímetro digital, cada cinco segundos, obtenemos estados intermedios del voltaje. En la tabla 2 se realiza el cálculo de diferencias. Esto implica calcular el cambio (cuánto cambia) con la diferencia fundamental

$$\begin{array}{ccc} f(x+h) & - & f(x) \\ \text{Posterior} & & \text{Anterior} \end{array}$$

Donde las primeras diferencias corresponden a las primeras variaciones, las segundas diferencias a las segundas variaciones y así sucesivamente. Observamos que tenemos cinco mediciones del voltaje de carga, entonces reconocemos un cuarto orden de variación.

**Tabla 2***Cálculo de diferencias*

Segundas variaciones	Primeras variaciones	Tiempo	Voltaje de carga	Primeras variaciones	Segundas variaciones	Terceras variaciones	Cuartas variaciones
		0	0				
	5			1.29			
0		5	1.29		-0.43		
	5			0.86		0.3	
0		10	2.15		-0.13		-0.41
	5			0.73		-0.11	
0		15	2.88		-0.24		
	5			0.49			
		20	3.37				

Fuente: Elaboración propia

Al hacer uso de la Serie de Taylor

$$x + \Delta x \frac{v}{1 \cdot \Delta z} + \Delta^2 x \frac{v\dot{v}}{1 \cdot 2 \cdot (\Delta z)^2} + \Delta^3 x \frac{v\dot{v}\ddot{v}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (\Delta z)^3} + \Delta^4 x \frac{v\dot{v}\ddot{v}\ddot{\ddot{v}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (\Delta z)^4} + \dots$$

Reconocemos que  $z$  representa la variable tiempo y  $\Delta z$  es su incremento uniforme (mediciones cada cinco segundos), en este caso,  $\Delta z = 5$ . La variable  $x$  representa el estado inicial del voltaje de carga,  $x = 0$ . Y el estado futuro del voltaje de carga se analiza con la evolución de sus variaciones. Por tanto, procedemos de la siguiente manera

Se retoma a

$$n\Delta z = v$$

Donde:  $n$  es el orden de variación

Como señalamos que tenemos un cuarto orden de variación, entonces

$$4(5) = v$$

$$v = 20$$

Al calcular  $\dot{v}$  tenemos lo siguiente

$$\frac{n-1}{2} = \left[ \frac{n\Delta z - \Delta z}{2\Delta z} \right] = \frac{\dot{v}}{2\Delta z}$$

$$\Delta z(n-1) = \dot{v}$$

Al sustituir  $\Delta z$  y  $n$  obtenemos

$$\dot{v} = 5(4-1) = 15$$

Para  $\ddot{v}$  tenemos

$$\Delta z(n-2) = \ddot{v}$$

$$\ddot{v} = 5(4-2) = 10$$

Para  $\dddot{v}$  tenemos

$$\Delta z(n-3) = \dddot{v}$$

$$\dddot{v} = 5(4-3) = 5$$

La siguiente variación de  $v$  es cero y todas las demás también son cero. El valor inicial  $x = 0$  es el primer término de la serie. Si se retoman cinco términos de la serie

$$x + \Delta x \frac{v}{1 \cdot \Delta z} + \Delta^2 x \frac{v\dot{v}}{1 \cdot 2 \cdot (\Delta z)^2} + \Delta^3 x \frac{v\dot{v}\ddot{v}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (\Delta z)^3} + \Delta^4 x \frac{v\dot{v}\ddot{v}\ddot{v}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (\Delta z)^4} + \dots$$

Reconocemos que corresponden a un cuarto orden de variación. Donde  $\Delta x$  es el valor de la primera variación, es decir,  $\Delta x = 1.29$ ;  $\Delta^2 x$  es el valor de la segunda variación,  $\Delta^2 x = -0.43$ ;  $\Delta^3 x = 0.3$ ; y  $\Delta^4 x = -0.41$

Al predecir el voltaje de carga a los 20 segundos y al sustituir  $\Delta x$ ,  $\Delta z$ ,  $v$ ,  $\dot{v}$ ,  $\ddot{v}$  y  $\ddot{v}$  tenemos lo siguiente

$$0 + 1.29 \frac{(20)}{1 \cdot (5)} - 0.43 \frac{(20)(15)}{1 \cdot 2 \cdot (5)^2} + 0.3 \frac{(20)(15)(10)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (5)^3} - 0.41 \frac{(20)(15)(10)(5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (5)^4}$$

$$0 + 5.16 - 2.58 + 1.2 - 0.41 = 3.37$$

El análisis de la variación sucesiva nos permite establecer que la predicción de 3.37 corresponde a la medición del voltaje de carga al transcurrir 20 segundos. Pero, ¿qué pasa si queremos predecir el voltaje de carga al transcurrir 25 segundos? Esta pregunta nos hace reflexionar sobre el cambio entre los 20 y 25 segundos. Es aquí donde tenemos que analizar comparaciones para reconocer el carácter estable del cambio y predecir valores futuros con el análisis de la variación sucesiva.

Entonces, para predecir el voltaje de carga, a los 25 segundos, analizamos las variaciones en la tabla 2. Observamos que el voltaje de carga aumenta: de 0 a 1.29; de 1.29 a 2.15; de 2.15 a 2.88; y de 2.88 a 3.37 . Entonces, el voltaje de carga va en aumento. Al analizar el primer orden de variación observamos que las primeras variaciones disminuyen: de 1.29 a 0.86; de 0.86 a 0.73; y de 0.73 a 0.49 . Al analizar el segundo orden de variación observamos que de -0.43 a -0.13 aumenta y de -0.13 a -0.24 disminuye. Y al analizar el tercer orden de variación vemos que disminuye de 0.3 a -0.11 . En el cuarto orden de variación solo tenemos un estado donde no es posible la comparación ni la seriación.

El primer orden de variación nos indica que el voltaje de carga “siempre” aumenta y el segundo orden de variación nos indica que las primeras variaciones “siempre” disminuyen, entonces podemos calcular el promedio de las segundas variaciones de la siguiente manera

$$\frac{-0.43 - 0.13 - 0.24}{3} = -0.266666666 \approx -0.27$$

Este valor se retoma como la siguiente segunda variación. Y se hace uso del modelo predictivo

$$\textit{Estado futuro} = \textit{estado actual} + \textit{variación}$$

Obtenemos

$$0.49 - 0.27 = 0.22 \text{ y } 3.37 + 0.22 = 3.59$$

Y para el estado siguiente de la tercera y cuarta variación tenemos el modelo

$$\textit{Estado futuro} - \textit{estado actual} = \textit{variación}$$

Obtenemos

$$-0.27 - (-0.24) = -0.03 \text{ y } -0.03 - (-0.11) = 0.08$$

Los resultados anteriores se muestran en la tabla 3.

**Tabla 3**

*Predicción del voltaje de carga a los 25 segundos*

Segundas variaciones	Primeras variaciones	Tiempo	Voltaje de carga	Primeras variaciones	Segundas variaciones	Terceras variaciones	Cuartas variaciones
		0	0				
	5			1.29			
0		5	1.29		-0.43		
	5			0.86		0.3	
0		10	2.15		-0.13		-0.41
	5			0.73		-0.11	
0		15	2.88		-0.24		0.08
	5			0.49		-0.03	
0		20	3.37		-0.27		
	5			0.22			
		25	3.59				

Fuente: Elaboración propia

Obtenemos una aproximación en la predicción (3.59) al transcurrir 25 segundos. Al hacer uso de la Serie de Taylor retomamos seis términos de la serie

$$x + \Delta x \frac{v}{1 \cdot \Delta z} + \Delta^2 x \frac{v\dot{v}}{1 \cdot 2 \cdot (\Delta z)^2} + \Delta^3 x \frac{v\dot{v}\ddot{v}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (\Delta z)^3} + \Delta^4 x \frac{v\dot{v}\ddot{v}\ddot{v}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (\Delta z)^4} + \Delta^5 x \frac{v\dot{v}\ddot{v}\ddot{v}^{IV}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (\Delta z)^5}$$

Hacemos lo siguiente

$$v = 25; \dot{v} = 20; \ddot{v} = 15; \ddot{v} = 10; v^{IV} = 5$$

$$\Delta x = 1.29; \Delta^2 x = -0.43; \Delta^3 x = 0.3; \Delta^4 x = -0.41; \Delta^5 x = 0.08 + 0.41 = 0.49$$

$$0 + 1.29 \frac{(25)}{1 \cdot (5)} - 0.43 \frac{(25)(20)}{1 \cdot 2 \cdot (5)^2} + 0.3 \frac{(25)(20)(15)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (5)^3} - 0.41 \frac{(25)(20)(15)(10)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (5)^4} + 0.49 \frac{(25)(20)(15)(10)(5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (5)^5}$$

$$0 + 6.45 - 4.3 + 3 - 2.05 + 0.49 = 3,59$$

Comprobamos la aproximación de la predicción al transcurrir 25 segundos.

Esta etapa tiene la intención de aportar elementos para el estudio de fenómenos de variación continua en algún contexto específico. Hacer uso de la Serie de Taylor para predecir estados futuros con el análisis de órdenes de variación y la variación sucesiva.

## 6. Reflexiones finales

El estudio histórico-epistemológico de la Serie de Taylor mediante un sistema de referencia variacional nos permite analizar un fenómeno de variación continua. Se analiza la demostración de la Serie de Taylor y se usa en un contexto de predicción en circuitos eléctricos. Específicamente, en el comportamiento del voltaje de carga de un capacitor. Se establece que, en el análisis se identifican prácticas variacionales: comparación, seriación y predicción. Y aspectos de la variación: carácter estable del cambio, órdenes de variación y variación sucesiva.

Este artículo contribuye al rediseño del Discurso Matemático Escolar al retomar la Historia de las Matemáticas en los procesos de enseñanza – aprendizaje. Aporta elementos para el diseño de actividades donde las ideas variacionales son reconocidas para comprender fenómenos de variación continua. Esto implica cambiar de paradigma, es decir, de un paradigma cauchiano (convergencia) a un paradigma newtoniano (predicción). Centrarse en la predicción permite el estudio de la variación con el uso de la Serie de Taylor en contexto de predicción en circuitos eléctricos. Y no en aproximar funciones por medio de polinomios con el uso de reglas de derivación y de procesos algebraicos.

## 7. Referencias

Anaconda, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA. Investigación e Innovación en Educación Matemática*, 8(1), 30-46.

- Almazán, C. (2009). *Elementos para la resignificación de la serie de Taylor a través de la tecnología* (Tesis de licenciatura no publicada). Universidad Autónoma de Yucatán, México.
- Arcos, I. (1993). *La Serie de Taylor en las escuelas de ingeniería. Análisis de textos* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Bayés, A., y Costa, V. (2022). Calculadora gráfica de GeoGebra para el estudio de función polinómica, polinomio y serie de Taylor. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 11(2), 52-71. DOI: <http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2022.v11i2p052-071>
- Caballero, M. (2018). *Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional* (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Caballero, M., y Cantoral, R. (2017). Una caracterización de la noción sistema de referencia para el tratamiento del cambio y la variación. En L. A. Serna (Ed.), *Acta Latinoamericana de*
- Caballero, M., y Moreno, G. (2017). Diseño de una situación de aprendizaje para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. En L. A. Serna (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30 (pp. 1066-1074). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. <https://www.clame.org.mx/documentos/alme30.pdf>
- Cantoral, R. (1990). *Desequilibrio y equilibración. Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas* (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Cantoral, R. (2019). *Caminos del saber: pensamiento y lenguaje variacional*. España: Gedisa.
- Cantoral, R., Moreno, A., y Caballero, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: an empirical approach to teaching and learning. *ZDM*, 50(3), 1-13. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0922-8>
- Deluque-Gómez, J., Arcon-Osorio, A., y Cubillán-Acosta, N. (2018). Ecuaciones generalizadas de diferencias finitas basadas en series de Taylor para el cálculo de propiedades ópticas no lineales. *PROSPECTIVA*, 16(2), 13-23. DOI: <http://dx.doi.org/10.15665/rp.v16i2.1573>
- Galo, J. (2020). Congruencias en el triángulo de Pascal y el rectángulo de Newton. *Épsilon*, (106), 77-100. [https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/epsilon106\\_7.pdf](https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/epsilon106_7.pdf)
- Hernández, H. (2005). Contrastes Epistemológicos del Binomio de Newton y la Serie de Taylor en Dos Variables en los Fenómenos Físicos. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta*

- Latinoamericana de Matemática Educativa* 18 (pp. 523-529). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Hernández, H. (2006). *Una visión Socioepistemológica de la matematización del movimiento: del binomio de Newton a la serie de Taylor* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Autónoma de Chiapas, México.
- Hernández, J., y Cantoral, R. (2018). El carácter estable del cambio y su articulación con los niveles de constantificación: un estudio socioepistemológico. En L. A. Serna y D. Páges (Eds.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 31(1) (pp. 622-630). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. [https://www.clame.org.mx/documentos/alme31\\_1.pdf](https://www.clame.org.mx/documentos/alme31_1.pdf)
- Morales, A. (2009). *Resignificación de la serie de Taylor en una situación de modelación del movimiento: de la predicción del movimiento a la analiticidad de las funciones* (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México.
- Muñoz, G. (2006). *Dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico relativa a un campo de prácticas sociales asociadas al Cálculo integral: aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos* (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México.
- Nápoles, J. (2015). La Historia de la Matemática y el futuro de la Educación Matemática. En M. D. Pochulu y M. A. Rodríguez (Eds.), *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 249-267). Editorial Universitaria de Villa María.
- Pérez, R. (2019). Estudio sobre el papel de la confrontación en el tratamiento de la física clásica de Newton al discurso Matemático Escolar (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Tecnológico Nacional, México.
- Reyes, D., Palmeri, L., y Cantoral, R. (2019). Empoderamiento docente: variación y predicción en matemáticas. *La matemática e la sua didattica*, 27(2), 141-159.
- Romero, F., Rodríguez, F., y Henao, S. (2017). Análisis histórico-epistemológico en la Educación Matemática. En L. A. Serna (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30 (pp. 245-253). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. <https://www.clame.org.mx/documentos/alme30.pdf>
- Struik, D. (1986). *A source book in mathematics, 1200-1800*. Princeton.
- Taylor, B. (1717). *Methodus Incrementorum Directa & Inversa*. Londini.



- Torres, L., Guacaneme, E., y Arboleda, L. (2014). La Historia de las Matemáticas en la formación de profesores de Matemáticas. *Quipu, Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología*, 16(2), 203-224.
- Zúñiga, F. (2020). Un análisis del sistema de referencia variacional en un contexto de circuitos eléctricos con estudiantes de nivel superior. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 5, 1-22. DOI: <https://doi.org/10.46618/iime.76>
- Zúñiga, F., Muñoz, G., y Morales, E. (2021). Fundamentos para diseñar situaciones de aprendizaje a través de la variación: simulación del comportamiento de un capacitor. En A. Rosas (Ed.). *Avances en Matemática Educativa. Actividad Docente* (pp. 79-96). México: Lectorum.
- Zúñiga, F. (2022). *Socioepistemología del Cálculo y Resignificación Didáctica de la Serie de Taylor en Contexto de Predicción en Circuitos Eléctricos* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Autónoma de Chiapas, México.

