

Los errores algebraicos. ¿Qué tan consistentes son a través del Tiempo?

El Cálculo y su Enseñanza.

ISSN: 2007-4107 (electrónico)

José Luis Díaz Gómez
joseluis.diaz@unison.mx

Isabel Dorado Auz
isabel.dorado@unison.mx

Universidad de Sonora

Recibido: 4 mayo de 2022

Aceptado: 27 diciembre de 2022

Autor de Correspondencia:
José Luis Díaz Gómez



Resumen: En este trabajo se hace una comparación de los resultados de la aplicación de un examen diagnóstico de errores algebraicos a dos generaciones de estudiantes que asisten a un curso de Cálculo Diferencial e Integral, una del año 1989 y otra del año 2006. Se aplicó un examen diagnóstico de 28 preguntas que contienen errores algebraicos que se obtuvieron a partir de una encuesta con profesores de matemáticas. El objetivo del estudio es realizar una comparación del comportamiento de los errores para verificar que tan consistentes y persistentes son a través del tiempo. Con la aplicación del examen se encontró que los errores no sólo fueron persistentes, sino que también se incrementaron. También se encontró que entre los estudiantes los errores de extrapolación lineal son los de frecuencia más alta.

Palabras Clave: errores algebraicos, análisis de errores, cálculo diferencial

Abstract: This paper compares the results of the application of a diagnostic test of algebraic errors to two generations of students attending a Differential and Integral Calculus course, one from 1989 and the other from 2006. A diagnostic test of twenty-eight questions containing algebraic errors obtained from a survey of mathematics teachers was applied. The objective of the study is to make a comparison of the behavior of the errors to verify how consistent and persistent they are over time. With the application of the test, it was found that the errors were not only persistent, but also increased. It was also found that among the students, linear extrapolation errors are the ones with the highest frequency.

Keywords: algebraic errors, error analysis, differential calculus.

1. Introducción

El presente trabajo consiste en la aplicación de un examen diagnóstico sobre errores algebraicos a 281 estudiantes de la carrera de Químico Biológicas (Q. B.) que tomaron el curso de Cálculo Diferencial e Integral en el primer semestre del año 1989, una generación de nuevo ingreso a la carrera. El objetivo es hacer un análisis comparativo entre el comportamiento de estudiantes de esta carrera y contrastarlo con lo que hicieron 276 estudiantes de la misma carrera en el año 2006 en el mismo curso de Cálculo Diferencial e Integral, también de nuevo ingreso.

Al momento de aplicar el examen, los estudiantes no habían recibido antes un curso propedéutico sobre álgebra así que podemos suponer entonces que los resultados reflejan los conocimientos recibidos en los niveles de secundaria y preparatoria. En este marco situamos las pruebas de diagnóstico, a las que podemos asignar los siguientes objetivos específicos:

- Retroalimentar al sistema escolar preuniversitario regional para que pueda optimizar sus esfuerzos en mejorar la enseñanza de la matemática.
- Informar a los docentes del curso de cálculo el nivel de conocimientos de los alumnos, con el fin de que puedan diagramar una enseñanza acorde a la situación real.
- Alertar a los propios estudiantes acerca del nivel de sus conocimientos matemáticos (Díaz, 2009)

El examen diagnóstico de errores contiene 28 preguntas de opción múltiple, cada pregunta tiene cuatro opciones, tres con errores que los estudiantes cometen con mucha frecuencia y una cuarta opción: *Ninguna de las anteriores. Da tu propia respuesta.* Los errores se obtuvieron a través de una encuesta realizada en los años del 1987 y 1988 a 85 profesores de matemáticas de distintas instituciones de nivel medio y superior del Estado de Sonora. Estos errores han sido reportados y clasificados también en los trabajos de Radatz (1979) y Matz (1982), se mencionan estos autores porque se trabajó bajo sus teorías, además en estos años eran pioneros en el trabajo sobre errores.

Matz (1982) distingue dos fases en la conducta de los alumnos ante un problema: en la primera, el conocimiento previo sobre el tema toma la forma de una regla o fórmula a aplicar, mientras que en la segunda se ponen en juego un conjunto de técnicas de extrapolación que actúan de nexo entre las reglas conocidas y los problemas que no son familiares. Los errores sistemáticos en los que incurren los alumnos en la resolución de problemas son, según este autor, el resultado de un fracasado intento por adaptar conocimientos, adquiridos previamente, a una nueva situación.

Los errores del examen se agruparon en los temas de álgebra siguientes: 1) operaciones con racionales; 2) Desarrollo binomial; 3) Leyes de cancelación; 4) Términos semejantes; 5) Exponenciación; 6) Ley distributiva; 7) Uso del cero; 8) Factorización; 9) Despeje de variables. Por tanto, con la aplicación del examen encontramos la frecuencia de los errores, cuales son más frecuentes y persistentes y, también en que temas de álgebra tienen más dificultades los estudiantes. Conocer esta información es de gran utilidad para los profesores que imparten un curso de cálculo.

2. Antecedentes

El estudio, investigación y análisis de errores algebraicos se ha realizado durante muchos años y por muchos investigadores en México y en muchos países. Se pueden encontrar diversos artículos sobre este tema en internet y en las revistas especializadas en educación matemática, mencionamos algunos trabajos recientes.

Umam y Susandi (2022) realizaron un estudio cualitativo que utilizó un enfoque exploratorio descriptivo con estudiantes de primer año de educación matemática. Utilizaron una prueba, entrevistas y triangulación. Los resultados mostraron que los estudiantes tienen bajas habilidades de pensamiento crítico; por lo tanto, no pudieron completar la tarea correctamente. Basándose en la teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOE), encontraron que los errores de los alumnos al completar los problemas de matemáticas constan de cuatro elementos, a saber: i) los errores en la interpretación; ii) los errores en la comprensión del concepto; iii) el error en los procedimientos; y iv) el error en lo técnico.

Sislema, et al. (2021) realizaron una investigación con el propósito de analizar el aprendizaje de la matemática en función de los errores algebraicos con estudiantes del nivel de educación general básica, concluyen que los errores en las matemáticas no son cometidos solamente por los estudiantes sino también por los docentes o matemáticos profesionales, los errores algebraicos son fuente de conocimiento que podemos explotar para profundizar en el pensamiento matemático.

Bolaños y Lupiañez (2021) realizaron un trabajo para clasificar e interpretar los errores algebraicos que presenta un grupo de estudiantes matriculados en un curso Matemática General que se oferta a diversas carreras. Como resultado del análisis detectaron que los errores más frecuentes en las respuestas de los ítems responden al uso de la letra como incógnita de valor específico, letra como número generalizado o en el manejo de la letra como variable.

Las referencias anteriores nos muestran que el problema aún está vigente, sin embargo, los resultados de las investigaciones no son conocidos por los profesores ni han sido asimilados por los programas educativos, por lo cual el problema persiste (Díaz, 1995). En este estudio no se tiene la intención de realizar aquí un análisis minucioso sobre este tema, sino más bien hacer un comparativo entre los resultados de la aplicación reiterada del examen diagnóstico de errores a través de los años y observar si estos han cambiado a través del tiempo.

En los cursos que se imparten en los primeros semestres de las carreras del nivel superior, los profesores han detectado que los estudiantes tienen graves deficiencias en el manejo algebraico. Para intentar remediar esta situación se imparten cursos propedéuticos de álgebra a los estudiantes. Sin embargo, el problema persiste como lo muestran los artículos arriba mencionados. En 1987 nos preguntamos:

¿Conocen los profesores cuáles son los errores más frecuentes?, ¿tendrán localizados los temas álgebra dónde se producen? y, ¿las causas que producen estas deficiencias?

Para intentar responder a estas preguntas se realizó en 1987 un proyecto cuyo propósito es realizar un estudio regional sobre errores, bajo la óptica de los trabajos de realizados por Radatz (1979) y Matz. (1982) sobre los errores. Para lograr los objetivos del proyecto, se plantearon entre otras etapas las siguientes:

1. Realizar entrevistas y encuestas a maestros con el propósito de que ellos nos indiquen los errores que han detectado en los estudiantes y las posibles causas que lo provocan.
2. Enfrentar a los estudiantes de bachillerato y nivel superior a éstas y otras dificultades.
3. Con los resultados diseñar un examen diagnóstico de errores que permita conocer las deficiencias de los estudiantes.

El trabajo desarrollado bajo este proyecto dio como resultado el examen diagnóstico de 28 preguntas de errores que hemos mencionado. Con respecto a las causas que los provocan los profesores principalmente mencionaron a) causas atribuibles a los estudiantes, b) causas atribuidas a una formación previa deficiente, c) causas atribuidas a los profesores (Díaz, 1995).

Bachelard (1978) introdujo el concepto de obstáculo epistemológico para explicar la aparición de los errores en la conformación del conocimiento. Señala que los entorpecimientos y confusiones que causan estancamientos y retrocesos en el proceso del conocimiento, provienen de una tendencia a la inercia, a la que da el nombre de obstáculo: se conoce en contra de un conocimiento anterior (insuficiente o adquirido deficientemente) que ofrece resistencia, la mayoría de las veces porque se ha fijado en razón de haber resultado eficaz hasta el momento; cuando se lo pretende utilizar en un contexto o una situación inadecuados, se produce el error.

En publicaciones de 2009, Díaz y Pochulu coinciden en afirmar que en el ámbito de la educación matemática los errores aparecen permanentemente en las producciones de los alumnos. Para Díaz, las dificultades de distinta naturaleza que se generan en el proceso de aprendizaje se conectan y refuerzan en redes complejas que obstaculizan el aprendizaje, y estos obstáculos se manifiestan en la práctica en forma de respuestas equivocadas. Pochulu, por su parte, asevera que es común que los errores constituyan un elemento estable en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en todos los niveles del sistema educativo. Díaz se enfocó en contabilizar los errores más comunes a través de un examen diagnóstico, que se obtuvo a través de encuestar profesores de los niveles básico, medio y superior, mientras Pochulu entrevistó a docentes para que fueran ellos los que señalaran los errores que han detectado en sus cursos.

Ahora bien, estos errores algebraicos no solo son comunes en América Latina, sino que parecen estar extendidos por todo el planeta, tal y como lo indican Booth et al. (2014). Por lo mismo, el objetivo del profesor no debe ser evitar que los estudiantes cometan errores, sino aprender a conocer las causas que los provocan.

3. Estudio de Referencia.

Para el estudio que aquí se presenta se tomó como referencia el trabajo realizado por Díaz (1995) quien se enfocó en comprender y analizar los errores algebraicos más comunes que cometen los estudiantes desde secundaria hasta la universidad. Se utilizó el examen diagnóstico de errores que se obtuvo en este trabajo y se aplicó a 281 estudiantes de primer ingreso a la carrera de Q. B. en el segundo semestre del año 1989 y posteriormente a 176 estudiantes de la misma carrera de primer ingreso, en el mismo curso y el año 2006.

El examen consta de 28 preguntas de opción múltiple cada una con 4 opciones (A, B, C, D), las primeras tres contienen errores frecuentes. En la cuarta opción (D) se espera que los estudiantes escriban la respuesta correcta, ya que en las opciones de cada pregunta no se encuentra la respuesta correcta. El examen si bien no es exhaustivo sobre el álgebra, si representa una muestra de temas que son básicos para el curso del cálculo. El examen se aplicó en el salón de clases y tuvo una duración de tiempo entre 30 y 45 minutos.

La información de cada una de las respuestas dadas a las preguntas se capturó y se procesó con una base de datos de Excel, lo que nos permitió la frecuencia y porcentaje de cada error del examen, así como un porcentaje sobre los temas de álgebra en los que se agruparon los errores y las gráficas de barras. Este análisis ha permitido modificar el examen quitando opciones con baja frecuencia y reemplazarlos por nuevos que se han recuperado a partir del análisis de la cuarta opción donde los estudiantes escriben su respuesta.

A continuación, para dar una idea de las preguntas mostramos algunas del examen.

8.-¿La expresión $a^m + a^n$ es igual a la expresión?

(A) a^{m+n} (B) a^{mn} (C) $2a^{mn}$ (D) Ninguno de los anteriores. Da tu propia respuesta.

13.- ¿Al desarrollar la expresión $(a + b)^2$ se obtiene como resultado?

(A) $a^2 + ab + b^2$ (B) $a^2 + b^2$ (C) $2a + 2b$ (D) Ninguno de los anteriores. Da tu propia respuesta.

17.- ¿El resultado que se obtiene al despejar c de la ecuación $cb = a + b$ es?

(A) a (B) $-b(a + b)$ (C) $\frac{a + b}{c}$ (D) Ninguno de los anteriores. Da tu propia respuesta.

23.- Al despejar z de la ecuación $z^2 = x + y$ se obtiene:

(A) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ (B) $\sqrt{x + y}$ (C) $x^2 + y^2$ (D) Ninguno de los anteriores. Da tu propia respuesta.

Observe que las tres preguntas contienen errores muy frecuentes como los siguientes:

En la pregunta 8. $a^m + a^n = a^{mn}$. En la pregunta 13. $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. En la pregunta 17. $\frac{a + b}{b} = a$. En la pregunta 23 $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Entre otros.

4. Resultados de la aplicación del examen diagnóstico.

Para efectos comparativos se diseñó la siguiente tabla que nos muestra algunos de los errores más frecuentes seleccionados por los estudiantes del año 1989 con el agregado de los resultados obtenidos en el año 2006. Cada opción de las preguntas fue seleccionada por los estudiantes, pero como son 84 errores distintos en el examen, en las tablas sólo se muestran las que obtuvieron los porcentajes más altos en ambos exámenes. Hay casos donde una de las opciones obtuvo un alto porcentaje, pero sólo en uno de los exámenes.

Tabla1. Porcentajes más altos dadas a una opción de las preguntas del examen.

<i>Pregunta</i>	<i>Opción</i>	<i>% año 1989</i>	<i>% año 2006</i>
3.-¿La factorización de $a^3 - b^3$ es?	$(a - b)^3$	41.5	34.2
8.-¿La expresión $a^m + a^n$ es igual a la expresión?	a^{m+n}	44.1	39.8
9.-¿Al efectuar la operación $\frac{k}{0}$ el resultado que se obtiene es?	0	54.4	67
10.-¿El resultado que se obtiene al efectuar la multiplicación de $a\left(\frac{b}{c}\right)$ es?	$\frac{ab}{ac}$	37.4	53.4
12.-¿Al simplificar la expresión $x^3 - x^2$ se obtiene?	$-x^5$	27.8	30.1
14.-¿Al despejar c de la expresión $c^2 = a^2 + b^2$ el resultado es?	$a + b$	18.1	29
16.-¿Cuál es el resultado que se obtiene al simplificar la expresión $x + y$?	xy	44.1	55.1
18.-¿El resultado de efectuar la operación $(x - y)^2$ es?	$x^2 - y^2$	21.4	33

Continuación de la Tabla 1

Tabla2. Porcentajes más altos dadas a una opción de las preguntas del examen.

<i>Pregunta</i>	<i>Opción</i>	<i>% año 1989</i>	<i>% año 2006</i>
19.- ¿Al efectuar la operación $(a^2)^3$ se obtiene como resultado?	a^5	49.8	51.7
20.- ¿Al despejar z de la ecuación $z(x + y) = a$ se obtiene como resultado?	$\frac{a}{x} + \frac{a}{y}$	27	27.3
23.-¿Al despejar z de la ecuación $z^2 = x + y$ se obtiene?	$\sqrt{x} + \sqrt{y}$	43.1	30.7
24.-¿La expresión $a(x)(y)$ es igual a la expresión?	$(ax)(ay)$	58.7	52.3
25.-¿Al simplificar la expresión $\frac{a}{a(a+b)}$ se obtiene?	$a + b$	38.1	48.9
27.-¿Al factorizar la expresión $4x^2 - 9$ se obtiene?	$(2x - 3)^2$	31	33.5
28.-¿La expresión a^{-2} es igual a la expresión?	$\frac{0}{a^2}$	26.7	20.5

Los estudiantes a los que se les aplicó el examen son de primer ingreso a la misma carrera y la aplicación se llevó a cabo al inicio del curso de cálculo, son estudiantes egresados de distintas instituciones del nivel medio superior del Estado de Sonora. Se observa que la diferencia entre los porcentajes de los errores que se muestran es mínima en muchos casos, es decir que a pesar de que pasaron 17 años entre las dos generaciones los errores persisten. Dado que no es posible colocar aquí la tabla completa de los 84 errores que contiene el examen, si podemos observar el porcentaje de los temas de álgebra en que se agruparon los errores.

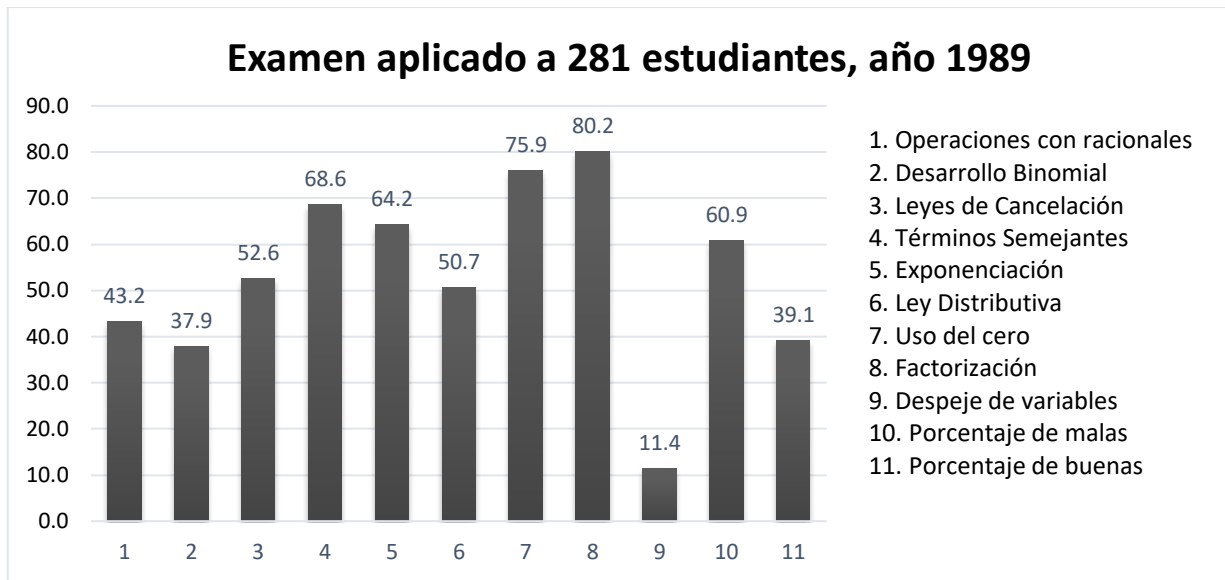


Figura 1. Porcentaje de errores por temas de álgebra de la generación del año 1989.

En las últimas dos columnas se encuentra: a) 60.9% de respuestas incorrectas, y b) 39.1 % de respuestas correctas.

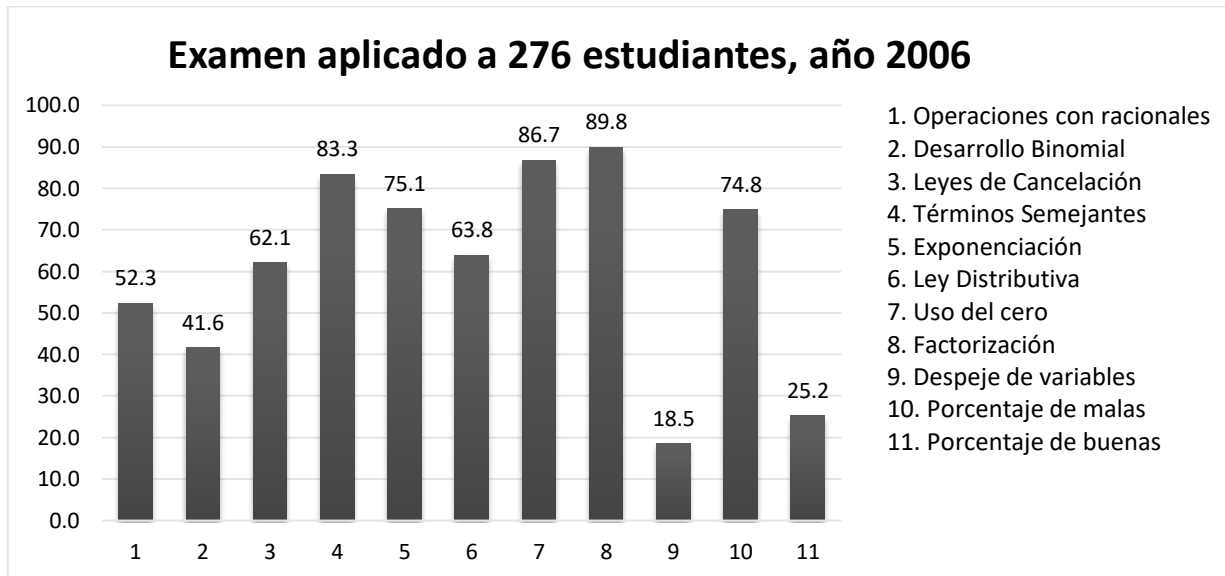


Figura 2. Porcentaje de errores por temas de álgebra de la generación del año 2006.

En las últimas dos columnas se encuentra: a) 74.8% de respuestas incorrectas, y b) 25.2 % de respuestas correctas. Obsérvese que el desempeño de los estudiantes del año 2006 es más bajo que el de los estudiantes del año 1989. Sin querer entrar en una discusión es conocido que los programas de matemáticas del nivel medio superior han sufrido cambios entre estos años.

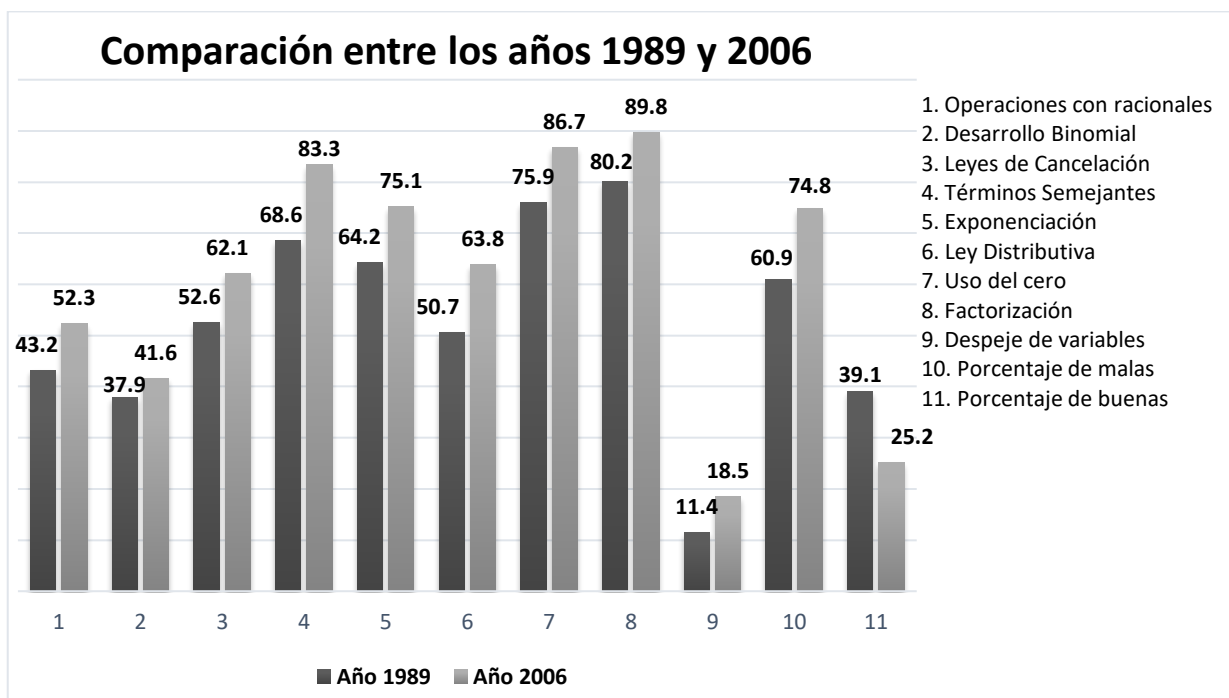


Figura 3. Comparación de los porcentajes en los temas de álgebra entre las dos generaciones de estudiantes.

De acuerdo con la gráfica de la Figura 3, el desempeño de los estudiantes del año 2006 en cada uno de los temas es menor que el del año 1989 puesto que el porcentaje de errores en cada uno de los temas es mayor al del año 2006. Tomando en cuenta que el contenido de los temas son errores algebraicos, podemos sugerir que los errores no solo se preservaron, sino que se incrementaron en el 2006. Esta información es muy útil para los profesores del curso ya que podrán informar a los estudiantes y tratar de incidir sobre ellos durante el curso.

5. Análisis de los errores.

Uno de los trabajos que guiaron este estudio de errores es el de la investigadora Marlyn Matz, es por esta razón que analizaremos los errores bajo su trabajo.

En este estudio, el tema principal son los errores que cometen estudiantes al inicio de un curso de Calculo Diferencial e Integral a través del tiempo, analizados en dos generaciones con una diferencia de 17 años.

Marlyn Matz (1982) desarrolló una teoría para explicar algunos de los errores que se han observado en la solución de problemas de álgebra a nivel de bachillerato. Esta teoría considera, que, estudiando los cambios conceptuales necesarios para aprender álgebra, se pueden predecir los errores más probables. Y bajo esta óptica divide los errores comúnmente observados en tres categorías; 1) errores generados por una elección incorrecta de una técnica de extrapolación; 2) errores que reflejan un conocimiento básico pobre, aunque correcto, y 3) Errores que surgen durante la ejecución de un procedimiento.

Las dos técnicas de extrapolación que ponen en juego los alumnos al resolver situaciones algebraicas son la linealidad y la generalización, aquí solo consideraremos la linealidad, porque de acuerdo con algunos investigadores, “la linealidad incorrectamente aplicada en potencias, radicales, logaritmos y en trigonometría, presentes en la resolución de diversos problemas del estudiantado genera una barrera en otros conocimientos cuando son utilizados como herramientas” (Aguerre, et al. (2022, pág. 3). Esto sin dejar de considerar la importancia de realizar un análisis de los otros errores, aquí los consideramos porque se puede observar en la Tabla 1 y Tabla 2 que estos errores tienen un alto porcentaje.

La linealidad: sucede cuando el estudiante al trabajar con un objeto, lo descompone y trata de manera independiente cada una de sus partes. La mayoría de la experiencia previa de los alumnos es compatible con la hipótesis de la linealidad debido a que, en la aritmética, la inmensa cantidad de ocasiones, los estudiantes agregan y utilizan la ley distributiva que muy probablemente refuerza la aceptación de la linealidad. Mostraremos unos ejemplos de este tipo de error encontrados en el examen.

En la Pregunta 3. $a^3 - b^3 = (a - b)^3$

En la pregunta 18. $(x - y)^2 = x^2 - y^2$

En pregunta 8. $a^m + a^n = a^{mn}$

En la pregunta 20. $\frac{a}{x+y} = \frac{a}{x} + \frac{a}{y}$

En la pregunta 10. $a\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{ab}{ac}$

En la pregunta 23. $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

En la pregunta 14. $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

En la pregunta 25. $\frac{a}{a(a+b)}$

De acuerdo con los ejemplos mostrados sobre las técnicas de extrapolación lineal, hemos notado que estos errores se encuentran con mucha frecuencia en los cursos de cálculo, debido a que los estudiantes se han apropiado de reglas o las recuerdan y las modifican para aplicarlas a cualquier ejercicio parecido que se les presente, sin darse cuenta del tipo de error que cometen. Porque ¿quién no se ha encontrado con estas operaciones en los cursos de cálculo entre los estudiantes?(Cury y Cassol, 2004; Ascencio et al., 2017)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x+2}{x} \right) = \frac{d}{dx} (2) = 0 \text{ o también } \int \left(\frac{x+2}{x} \right) dx = \int 2 dx = 2x + C \text{ o bien } \sum_{x=1}^n \left(\frac{x+2}{x} \right) = 2 \sum_{x=1}^n (1) =$$

$$2n. \text{ Esto sólo con el error } \frac{x+2}{x} = \frac{x+2}{x} = 2$$

6. Aplicación continua del examen diagnóstico

Se aplicó el examen diagnóstico a dos generaciones de estudiantes de nuevo ingreso a la carrera de Q. B., para efectuar el estudio, pero este análisis queda incompleto si no se realiza a través de varios años, así que el examen diagnóstico se aplicó a 16 grupos de estudiantes de la misma carrera en los siguientes años: dos grupos del 2001, un grupo del 2002, uno del 2003, dos grupos del 2004, tres grupos del 2015, uno del 2016, uno del 2018, uno del 2019, incluyendo aquí los estudiantes de la generación del 2006. En total se aplicó a 544 estudiantes. Se muestra una tabla comparativa entre el año 1989 y la muestra de varios años. Sólo se muestran los errores de

extrapolación lineal más frecuentes, los datos de los demás errores son muy parecidos a los del 2006 ya mostrados.

Tabla1. Porcentajes más altos dadas a una opción de las preguntas del examen.			
<i>Pregunta</i>	<i>Opción</i>	<i>% año 1989</i>	<i>% año 2001-2019</i>
3.-¿La factorización de $a^3 - b^3$ es?	$(a - b)^3$	41.5	34
8.-¿La expresión $a^m + a^n$ es igual a la expresión?	a^{m+n}	44.1	39.6
10.-¿El resultado que se obtiene al efectuar la multiplicación de $a\left(\frac{b}{c}\right)$ es?	$\frac{ab}{ac}$	37.4	55.8
14.-¿Al despejar c de la expresión $c^2 = a^2 + b^2$ el resultado es?	$a + b$	18.1	27.8
18.-¿El resultado de efectuar la operación $(x - y)^2$ es?	$x^2 - y^2$	21.4	27.8
20.- ¿Al despejar z de la ecuación $z(x + y) = a$ se obtiene como resultado?	$\frac{a}{x} + \frac{a}{y}$	27	27.3
23.-¿Al despejar z de la ecuación $z^2 = x + y$ se obtiene?	$\sqrt{x} + \sqrt{y}$	43.1	30.4
25.-¿Al simplificar la expresión $\frac{a}{a(a+b)}$ se obtiene?	$a + b$	38.1	44

Además, realizamos la comparación de los temas de álgebra entre las dos muestras de estudiantes. Obsérvese que a través de los años se tiene también un incremento de los errores por tema.

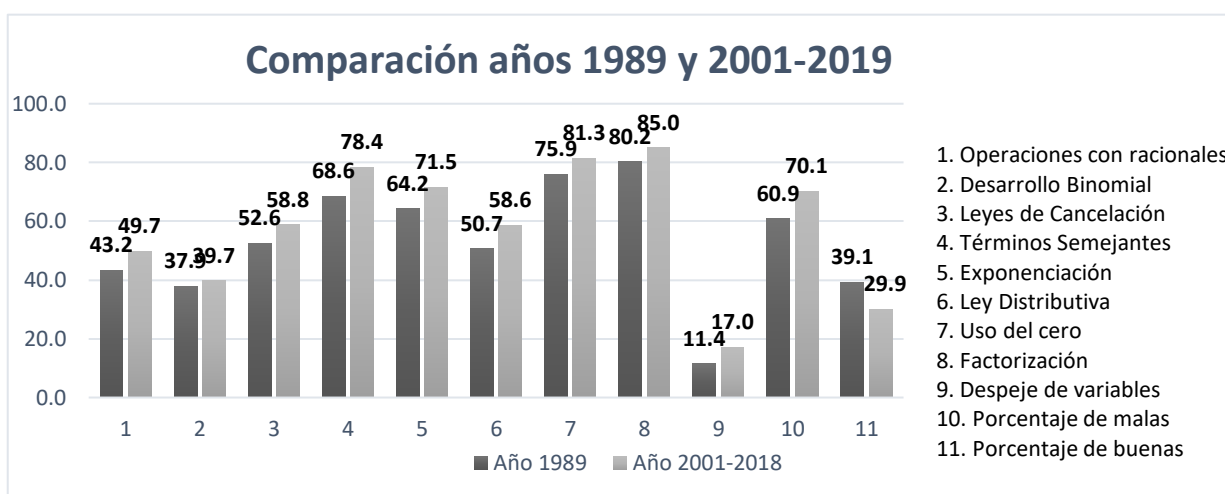


Figura 4. Comparación de los porcentajes en los temas de álgebra entre los estudiantes de 1989 y los años 2001-2019.

7. Conclusiones

En la primera aplicación del examen diagnóstico en 1989 se observan altos porcentajes en los errores del examen, así como en los temas de álgebra en que se agruparon, pero después de la aplicación del mismo examen bajo las mismas condiciones a una generación 17 años después encontramos que los errores no sólo persisten, sino que se incrementó su aparición es decir son consistentes y persistentes, destaca en el análisis que los errores del tipo de extrapolación lineal tienen una mayor probabilidad de aparecer entre los estudiantes. Incluso estas condiciones se encontraron en una muestra de varios años.

Es claro que dado que se analizaron estudiantes de primer ingreso a la carrera de Q. B. no es posible generalizar los resultados por lo que sería recomendable hacer un seguimiento de varias generaciones de primer ingreso y con estudiantes de varias carreras para obtener resultados más confiables.

Por otro lado, de acuerdo con la experiencia de los autores para que las dificultades y errores que enfrenta el estudiante al inicio de su carrera no interfieran en la consolidación de los conceptos matemáticos ni en la progresión de su formación, es necesario que los profesores incorporen actividades de identificación de dificultades y errores, abordándolos especialmente durante el trayecto del curso.

8. Referencias:

- Aguerrea, M., Solís, M., y Huincahue, J. (2022). Persistent mathematical errors when entering initial teacher math training: the linearity case. *Uniciencia*, 36(1), 1-18. <https://doi.org/10.15359/ru.36-1.4>
- Ascencio, R., Nesterova, E., Eccius, C. (2017). Estrategia correctiva para errores algebraicos de alumnos en cálculo diferencial. *Revista Electrónica Amiutem*. Vol. V, No. 2. pp. 46-58.
- Bachelard, G. (1978). *La formación del espíritu científico*. Siglo XXI.
- Bolaños, H., y Lupiáñez, J. (2021). Errores en la comprensión del significado de las letras en tareas algebraicas en estudiantado universitario. *UNICIENCIA*, 35(1), pp. 1-18. <https://doi.org/10.15359/ru.35-1.1>
- Booth, J., Barbieri, C., Eyer, F. y Paré, E. (2014). Persistent and Pernicious Errors in Algebraic Problem Solving. *Journal of Problem Solving*. Volume 7. docs.lib.purdue.edu/jps.
- Cury, H, y Cassol, M. (2004). Análise de Erros em Cálculo: Uma Pesquisa para Embasar Mudanças / Error Analysis in Calculus: a Research to Base Changes. *Acta Scientiae*, Vol. 6. No. 1. pp. 27-36.
- Del Puerto, S., Minnaard, C., y Seminara, S. (2006). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana De Educación*, 38(4), pp. 1-13. <https://doi.org/10.35362/rie3842646>
- Díaz, J. (1995). Un estudio regional sobre errores algebraicos. *Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*. Volumen 1, pp. 155-160.
- Díaz, J. (2009). Los estudiantes de Cálculo a través de los errores algebraicos. *El Cálculo y su Enseñanza*. Volumen I, pp. 91-97.
- Matz, M. (1982). Towards a Process Model for High School Algebra Errors. *In Intelligent Tutoring Systems* (pp. 25-50). Academic Press.

- Pochulu, D. (2009). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. Colección Digital Eudoxus.
- Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10, pp.163–172. <https://doi.org/10.2307/748804>
- Sisler, C., Tixi, M., Conterón, M., Mariño, J., y LLuco, J. (2021). El aprendizaje de las matemáticas a base de los errores algebraicos. *ReNaCientE - Revista Nacional Científica Estudiantil*. Vol. 2. No. 1, pp. 44-56. <https://doi.org/10.46498/renacipb.v2i1.1562>.
- Taban, J y Cadorna, E. (2018). *Structure Sense in Algebraic Expressions and Equations of Groups of Students*. *Journal of Educational and Human Research Development*. No. 6, pp.140-154.
- Umam, K., y Susandi, A. D. (2022). Critical thinking skills: Error identifications on students' with APOS theory. *International Journal of Evaluation and Research in Education*, Vol. 11, No. 1, pp. 182. <https://doi.org/10.11591/ijere.v11i1.21171>