# La Herencia de Leibniz en la Era de la Computación

**François Pluvinage**
francois.pluvinage@math.unistra.fr
Departamento de Matemática Educativa,
CINVESTAV-IPN México e IREM France

Autor de correspondencia: Francois Pluvinage

**Resumen** - Las fuentes históricas son parte de los ricos recursos que se encuentran hoy a disposición de la comunidad docente; gracias a la red Internet que proporciona cantidad de documentos originales en línea, nos interesó seguir esta pista al indagar algunos aspectos de la personalidad de Leibniz, famoso entre los fundadores del cálculo. A partir de las fuentes que pudimos consultar, destacamos tres rasgos de interés didáctico de su personalidad: su afán en enfrentarse a problemas reales, su mente lúdica en el buen sentido de la palabra, su espíritu sistémico. Ilustramos estos rasgos con casos procedentes de su obra que pueden inspirar el diseño de actividades para la enseñanza de las matemáticas: la calculadora, la escritura de números y las operaciones en el sistema binario, la representación paramétrica de cicloides.

**Palabras clave:** Comunidad, computación, matemáticas.

**Abstrac:** The historical sources are part of the rich resources that are today available to the teaching community; Thanks to the Internet network that provides a number of original documents online, we were interested in following this lead by investigating some aspects of the personality of Leibniz, famous among the founders of calculus. From the sources that we were able to consult, we highlight three interesting didactic characteristics of his personality: his eagerness to face real problems, his playful mind in the good sense of the word, his systemic spirit. We illustrate these features with cases from his work that can inspire the design of activities for teaching

*El Cálculo y su Enseñanza.*© septiembre 2010- septiembre 2011, Año 2.Vol.2 No. 1.
Cinvestav, México D.F. P.p. 49-60
Fecha de recepción: 16-12-2010
Fecha de aceptación:22-12-2011

mathematics: the calculator, the writing of numbers and operations in the binary system, the parametric representation of cycloids.

**Keywords:** Community, computing, mathematics.

El joven Gottfried Wilhelm Leibniz tenía 4 años cuando falleció Descartes, en el año 1650, y 15 años a la muerte de Fermat. Si, durante la primera mitad del siglo XVII, Descartes introdujo en la geometría una transformación teórica profunda con la introducción de los sistemas de coordenadas (el *plano cartesiano*), y Fermat abordó de manera original problemas de máximos y mínimos y estudió las tangentes a curvas sin pasar por los círculos osculadores considerados por Descartes, fueron, durante la segunda mitad del siglo XVII, Leibniz (1646-1716) y Newton (1643-1727) quienes desarrollaron el *cálculo infinitesimal*, llamado *cálculo* por simplificación. Hubo una controversia en la época sobre la paternidad de esta nueva disciplina matemática; pero al final de cuentas, aparece que ambos sabios llegaron independientemente a sus resultados. Mientras Newton hablaba de *método de las fluxiones*, la denominación de cálculo se debe a Leibniz.


**Figura 1.** Sello con retrato de Leibniz, y su firma

En el presente artículo, nos interesamos en Leibniz, sin pretender exponer su vida ni sus obras. Nuestro objeto es mucho más modesto. Nos interesamos en presentar rasgos de la personalidad de Leibniz, que puedan aclarar su contribución al avance del cálculo en su época y ayudar al profesor de matemática de hoy a tomar consciencia de la importancia que tienen algunas características de su disciplina, ignoradas en el aula con demasiada frecuencia. Son tres los aspectos que destacaremos:

- Inmersión en la realidad: el afán de Leibniz en enfrentarse a problemas reales, que sean sencillos o complejos,
- Mente lúdica: el gusto por jugar con las matemáticas, Espíritu sistémico, en particular en matemáticas, ganas de hacer concreto lo abstracto, por usar medios de expresión que

permitan tratamientos generales.

## 1. Ejemplo de realización concreta: la calculadora de Leibniz

Para dar una idea del primer aspecto que queremos destacar, aquí está una lista de algunos problemas reales en los que Leibniz se metió: Diseñar un barco submarino (en paralelo con el francés Papin), mejorar la tecnología de cerraduras de las puertas, determinar la velocidad del viento, sugerir a los médicos un método confiable de tomar la fiebre de los pacientes, establecer un fondo para viudas y huérfanos. Pues es un abanico extenso, que abarca tanto lo técnico como lo social. La máquina de cálculo diseñada por Leibniz, seguramente podrá interesar a los profesores de matemáticas. Reproducimos unas ilustraciones (Figuras 2, una página sobre su máquina escrita por Leibniz en el año 1685, y Figura 3, varias realizaciones) y luego la describimos brevemente.

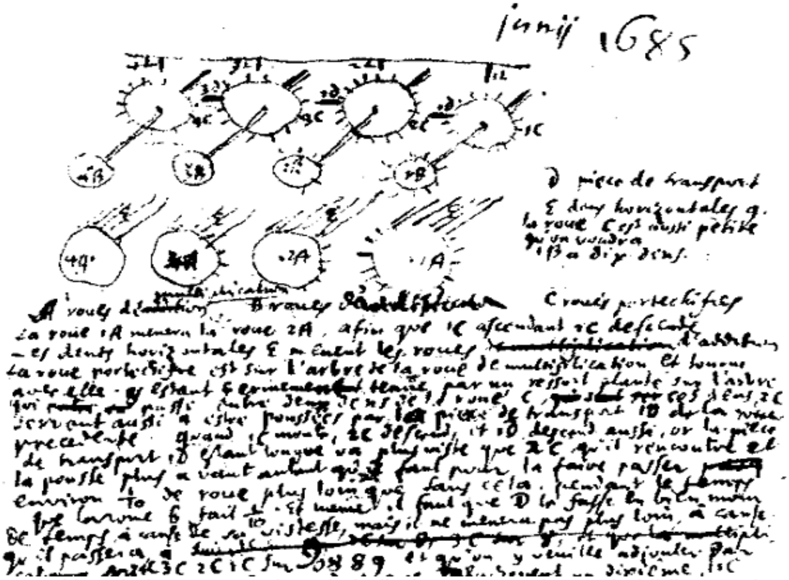



**Figura 2.** Uno de los manuscritos de Leibniz conservados en la biblioteca de Hannover

En el manuscrito de la Figura 2, escrito en francés, Leibniz aclara cómo los movimientos se transmiten entre ruedas. En particular, eso es necesario para los pasos de decenas (por ejemplo, al sumar 7 y 5, debo a la vez marcar 2 en mis unidades y también sumar 1 a la decena que sigue). Cabe aclarar que las lenguas usadas por Leibniz en sus escritos –libros, documentos y cartas– son: el latin, alrededor del 45%; el francés, alrededor del 30%; y el alemán, el 25% que queda).

La idea ingeniosa de Leibniz para sumar números es la introducción de *piñones de dientes desiguales* (véase Figura 3, izquierda), accionados por un manubrio. En el ejemplo de sumar 7, hacer visible el dígito 7 corresponde a ajustar la posición del piñón de dientes desiguales, de tal manera que será el tercer diente de la rueda motriz el que mueve la rueda del resultado. Así una vuelta del manubrió va a desplazar esta última rueda de 7 décimos de vuelta. Y si su ubicación inicial corresponde al número 5, un diente transmitirá el paso de decena a la rueda de la decena siguiente.


**Figura 3.** Imágenes de la máquina de Leibniz y de su sucesora Curta

La segunda idea de Leibniz es sujetar las ruedas motrices sobre una parte móvil, que se puede desplazar delante de la parte posterior fija, en la que los resultados se leen. Eso corresponde al desplazamiento que se hace de un renglón al siguiente en el algoritmo de la multiplicación escrita. Para entender cómo la máquina actúa, basta considerar un ejemplo con la descripción del funcionamiento de la máquina, acompañada por el producto obtenido por el algoritmo escrito tradicional.

Queremos, por ejemplo, multiplicar 225 por 307. Primero hago aparecer 0 en la parte fija y 225 en la parte móvil. Luego voy a girar el manubrio 7 vueltas. Por suma repetida, eso multiplica 225 por 7, de resultado parcial 1575 que aparece en la parte fija. Luego desplazo de dos lugares la parte móvil y giro ahora el manubrio 3 vueltas, lo que multiplica 225 por 300, de resultado 67500, mismo que en la parte fija se suma automáticamente al resultado parcial anterior 1575, para llegar al resultado final 69075.

```
   225
x  307
------
  1575
6750
------
69075
```

Producto 225×307 por escrito

**Figura 4.**

En la época de Leibniz, la precisión de las herramientas de fabricación no permitió un funcionamiento perfecto de su máquina. Pero en particular, el principio de una parte fija y una móvil se usará luego de Leibniz en casi todas la calculadoras fabricadas, como el "*arithmomètre*" de Thomas, hasta la más avanzada que fue la Curta de los años 1970 (Figura 3, abajo a la derecha), cuya parte móvil, en vez de trasladarse como en la máquina de Leibniz, gira frente a la parte fija. Pero a partir del fin de los años 1970, lo electrónico se substituyó a lo mecánico (y también a las tablas numéricas y a la regla deslizante de cálculo); y la Curta, y otras máquinas mecánicas, tuvieron que dejar a las computadoras el papel de herramientas de uso común.

Sin embargo, cabe recordar que los algoritmos numéricos en las computadoras funcionan con base en los mismos principios, sólo que usan otros sistemas que el mero sistema decimal. En particular se usa el sistema binario (y su extensión el código binario decimal o BCD por sus iniciales en inglés), pero vemos más adelante que el propio Leibniz también se interesó en estudiar este sistema.

En este apartado, lo que quisimos destacar es el interés en considerar problemas de naturaleza concreta en matemáticas. Es un aspecto importante de la propuesta didáctica presentada en Cuevas & Pluvinage (2003), al promover en particular proyectos de acción concretos.

## 2. Leibniz y el sistema binario

Leibniz se interesó en la cultura china. Es así que tradujo al latín el texto sobre el emperador de China Kangxi, escrito en 1697 por el jesuita Joachim Bouvet y presentado al rey de Francia Luis XIV. Luego Leibniz y Bouvet intercambiaron cartas.

En una carta, Leibniz envió a Bouvet una descripción de su *manera de contar por 0 & 1* (Leibniz, 1703, p, 88), y Bouvet pensó que eso era la clave del enigma de las *Cova de Fohy* (mítico emperador chino cuyo nombre se escribe Fuxi en inglés), en las que aparecen rayas superpuestas, unas completas y otras quebradas (Figura 5).

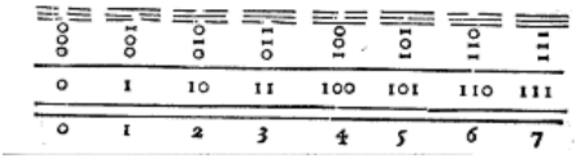



**Figura 5.** Interpretación de *Cova de Fohy* extraída de Leibniz (1703, p. 88)

Bouvet y Leibniz interpretaron las primeras como representantes de 1 y las segundas como representantes de 0, pero hoy aparece dudosa esta interpretación del escrito chino.

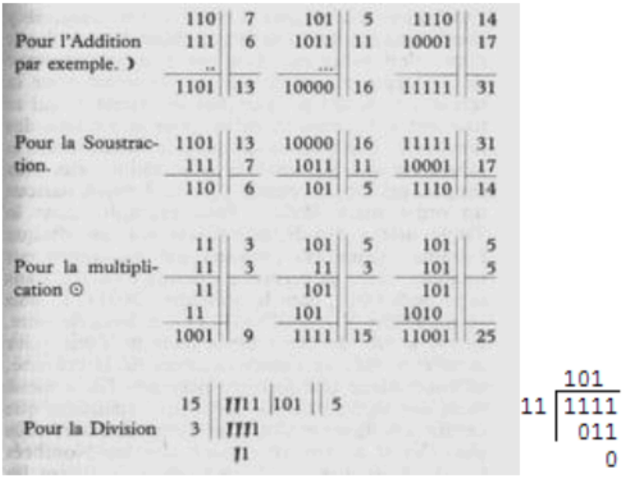



**Figura 6.** Operaciones aritméticas en sistema binario (Leibniz 1703, p. 86), y al lado la presentación escrita usual en México de la división (divisor a izquierda, dividendo a derecha y cociente arriba).

El texto de Leibniz (1703), enseña algunos ejemplos sencillos de operaciones aritméticas como ilustración del método (Figura 6). Pero en este caso, algo muy interesante es que además de este texto acabado, también tenemos acceso a páginas de borradores de Leibniz, en los que vemos el juego del sabio con el sistema. En la figura 7, tomada del sitio web Chronomath (Mehl), se observa como Leibniz hace varios intentos de escritura del algoritmo de la suma de 1, 3, 4, 9, 11, 7, 15, 30, 47, 27, 39 y 51, usando el sistema binario.

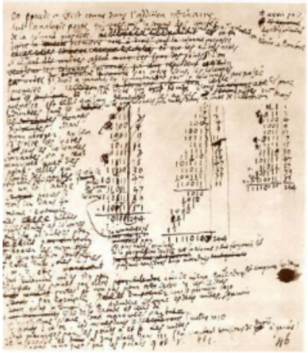


**Figura 7.** "Juego" de Leibniz al sumar en sistema binario

En su operación central, Leibniz introduce una etapa de cálculo (entre las dos barras horizontales), antes de llegar al resultado final, muy similar a lo que se acostumbra hacer en un producto. Así se resuelve el problema concreto de las transferencias de dígitos. Eso ya se entiende bien en un caso más sencillo que la suma considerada por Leibniz. En la figura 8, la suma 55 + 12 + 5 = 72 se obtiene con su método: debajo de la primera raya horizontal, los renglones sucesivos se trasladan cada vez de un lugar a la izquierda, y se suma el dígito siguiente con todos los que están encima.

```
  110111    110111
    1100      1100
+    101  +    101
--------  --------
      10        10
     10        10
   100       100
    1         1
  10        10
--------  --------
 1001000   1001000
```

**Figura 8.** Una suma binaria

Luego (Figura 7, derecha, donde sólo se traza una única raya horizontal), Leibniz llega al resultado mediante la introducción de puntos en el conjunto de los datos. Su interés es que los puntos, de valor 1, no se confunden con los datos.

En este ejemplo se manifiesta a la vez el interés de Leibniz en sistemas de notaciones eficientes y un cierto placer en ponerlos en juego. Este aspecto lúdico de las matemáticas también se encuentra en otros sectores de la actividad de Leibniz. Por ejemplo, la conocida *fórmula de Leibniz*, descubierta, antes de Leibniz, por Madhava (1350-1425), un matemático indio cuya obra perdida sólo se conoce por sus discípulos:

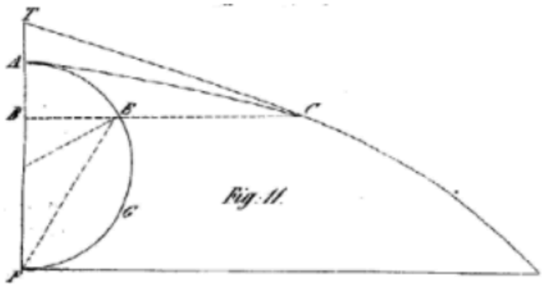
$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\ldots=\frac{\pi}{4}$$

no es una fórmula de mucho interés práctico para el cálculo de π, por ser muy lentamente convergente (véase el artículo *Serie de Leibniz* en Wikipedia). No importando lo anterior, su demostración es un ejemplo divertido de uso del cálculo integral, y la convergencia de la serie es una aplicación del *criterio de Leibniz*: "*Una serie alternada cuyo término general decrece en valor absoluto es convergente*".

La puesta en juego de las herramientas matemáticas introducidas, de la manera usada por un deportista para entrenarse, es de interés didáctico, en el sentido del texto de la Comisión francesa Kahane (2002). A la vez procura placer a muchos estudiantes, por obtener resultados desde notables hasta inesperados, y contribuye a la adquisición de automatismos útiles.

## 3. Visión didáctica del estudio de la cicloide por Leibniz

En sus escritos, Leibniz usó la palabra *función* (en latín *functio* significa cumplimiento, ejecución), y también introdujo la expresión de *función derivada* junto con el término de *diferencial*. Leibniz y Johann Bernoulli denotaban a las funciones por letras. En una carta que Leibniz envía a Huygens en 1690, publicada en las "gesammelte Werke" (Obras Reunidas) (1850, p. 43), aparece un ejemplo de la cicloide, donde Leibniz usa las letras $x$ y $y$. En otros textos se usan letras griegas, como ξ para denotar a una función de $x$.



Par le même moyen je reduis à l'analyse les courbes que Mr. des Cartes appelloit mechaniques, comme par exemple les cycloides, exprimant par une equation la relation entre x et y abscisse et ordonnée de la courbe. Par exemple (Fig. 11.) AB le sinus versus estant x, alors FGE*) arc du cercle chez moy se designe ainsi $\int(adx : \sqrt{2ax - xx})$, c'est à dire l'arc est la somme des elemens de la courbe circulaire qui sont: $adx : \sqrt{(2ax - xx)}$ (ou $\frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$) car les deux points me signifient division, pour eviter la soubscription du diviseur).

**Figura 9.** Tratamiento diferencial de la cicloide por Leibniz

Si la notación f($x$) se debe a Clairaut y se adoptó finalmente a partir de los años 1750, la letra $y$ queda en uso por supuesto en geometría analítica y en las ecuaciones diferenciales. En el inicio del texto sobre la cicloide de la carta a Huygens (Figura 9), Leibniz introduce la notación diferencial d$x$, y a continuación obtiene las tangentes a la cicloide con la diferencial

$\mathrm{d}y = \frac{2a - x}{\sqrt{2ax - x^2}}\mathrm{d}x$, que Leibniz escribía

$\mathrm{d}y = (2a - x)\mathrm{d}x : \sqrt{\ }\left(2ax - xx\right)$ para evitar denominadores (o: "*subscripción del divisor*").

La cicloide estudiada por Leibniz es un caso que vale la pena presentar a los estudiantes en un curso de cálculo al momento de estudiar las funciones trigonométricas: Es una situación muy común, en nuestro mundo de automóviles, y sin embargo no es obvia la trayectoria de un punto de una rueda; o más generalmente, de un punto ligado a una rueda que se desplaza sobre el suelo sin deslizar. La computación autoriza ahora actividades que no eran sencillas en la época de Leibniz.

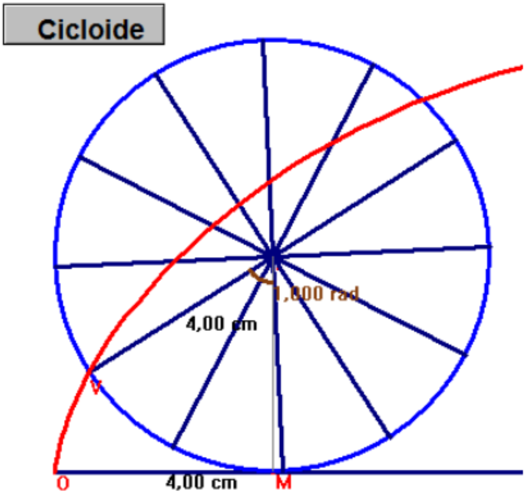



**Figura 10.** Cicloide trazada con software de geometría dinámica (Cabri II Plus).

Ecuaciones paramétricas de una cicloide: $x = at - h$ sen$(t)$, $y = a - h$ cos$(t)$. Arriba: $h = a$. La construcción con el software no necesita la escritura de las ecuaciones de la cicloide. Precisamente un aspecto interesante del estudio es que conduce al estudiante a considerar diversos registros de representación, en una situación que permite varias aproximaciones independientes. Es algo que experimentamos en el proyecto Globo (Cuevas, Moreno & Pluvinage, 2005), con la construcción puesta a disposición de los estudiantes; en el caso de la rueda, se puede pensar en una construcción geométrica diseñada por los estudiantes. Un interés de las ecuaciones paramétricas es que otorgan, por ejemplo en un programa como Derive, la posibilidad de trazar tangentes mediante el uso de zoom (véase el artículo de Laurent Vivier en este volumen) y de verificar los resultados analíticamente. Actividades de este tipo corresponden en particular, por la aproximación a los conceptos de derivada y diferencial que generan, a la visión didáctica presentada por Tall (1996).

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cuevas, C. and Pluvinage, F. (2003). Les projets d`action pratique, éléments d´une ingénierie d´enseignement des mathématiques. *Annales de didactique et sciences cognitives* (Vol. 8., p. 273-293). IREM de Strasbourg, France.

Cuevas, A., Moreno, S. & Pluvinage F. (2005). Una Experiencia De Enseñanza Del Objeto Función. *Annales de didactique et sciences cognitives* (Vol. 10, p. 177 – 208). IREM de Strasbourg, France.

Kahane, J-P. (ed.). (2002). *L'enseignement des Sciences Mathématiques.* Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, CNDP, Odile Jacob, Paris. At: http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/RapportCalcul/RapportCalcul.pdf last modif. June 2003

Leibniz, G. W. (1703). Explication de l'arithmétique binaire, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris, p. 85 – 89, consultado en línea (mayo de 2010) en http://ads.ccsd.cnrs.fr/docs/00/10/47/81/PDF/p85_89_vol3483m.pdf

Leibniz, G. W. (1850), Leibnizens gesammelte Werke. Sér. 3, t. 2 / aus den Handschriften der königlichen Bibliothek zu Hannover herausgegeben von Georg Heinrich Pertz, consultado en línea (mayo de 2010, páginas 43 y 44) en http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k111371d.image.r=Leibniz.f45.langES

Mehl, S., Artículo sobre Leibniz, *Sitio web Chronomath*, en http://www.chronomath.com

Serra, Y., (2009), La machine à calculer de Leibniz, *Sitio web Bibnum,* en http://www.bibnum.education.fr/calculinformatique/calcul/la-machine-a-calculer-de-leibniz

Tall, D. (1996). *Functions and Calculus; International Handbook of Mathematics Education*, chapter 8, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.