Cálculo de una variable: acercamientos newtoniano y leibniziano integrados didácticamente

Juan Antonio Alanís & Patricia Salinas
juan.antonio.alanis@itesm.mx, npsalinas@itesm.mx
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
México

Autor de correspondencia: Juan Antonio Alanís

Resumen. En este trabajo se perfila una propuesta para la enseñanza del Cálculo de una variable en la cual se han incorporado ideas de Newton y Leibniz, que constituyen un aporte importante en la creación y desarrollo de esa rama de las Matemáticas. A través de resolver problemas relacionados con la génesis del Cálculo, adaptados a la práctica escolar actual, se le propone al estudiante un escenario que lo invita a reconocer, en dichas ideas, una estrategia óptima para el estudio de situaciones reales donde la problemática de la variación está presente. Este acercamiento responde a una visión de las Matemáticas más amplia que la que predomina en la enseñanza tradicional, a ciertos principios del aprendizaje constructivista y al carácter instrumental de los cursos de matemáticas en las distintas carreras universitarias. Todo ello ha permitido concebir una reestructuración del discurso del Cálculo en el nivel universitario, donde las nociones y procedimientos son valorados en su calidad de herramientas para la solución de problemas reales.

Palabras clave: Cálculo, Enseñanza, Aprendizaje.

Abstrac: This work outlines a proposal for the teaching of one-variable calculus in which ideas from Newton and Leibniz have been incorporated, which constitute an important contribution in the creation and development of this branch of Mathematics. Through solving problems related to the genesis of Calculus, adapted to current school practice, the student is proposed a scenario that invites him to recognize, in these ideas, an optimal strategy for the study of real situations where the problem of the variation is present. This approach responds to a broader vision of Mathematics than the one that predominates in traditional teaching, to certain principles of constructivist learning and to the instrumental nature of mathematics courses in different university careers. All this has made it possible to conceive a restructuring of the Calculus discourse at the university level, where notions and procedures are valued as tools for solving real problems.

Keywords: Calculus, Teaching, Learning.

Fecha de recepción: 04-12-2010
Fecha de aceptación:06-02-2011

1. Introducción

En la enseñanza de la matemática, es común encontrar una presentación del Cálculo como teoría lógicamente estructurada y expresada en un lenguaje formal. Una estructuración tal se observa en los índices de múltiples libros de texto: números reales, funciones, límites, continuidad, derivada, aplicaciones de la derivada, integral y aplicaciones de la integral. Cada capítulo se desarrolla tomando en cuenta la información que el capítulo anterior se encargó de establecer. Por su parte, el lenguaje formal que se utiliza refleja la ausencia de un significado real de los objetos o resultados matemáticos. Por ejemplo, el Teorema Fundamental del Cálculo aparece una vez que los conceptos de derivada e integral han sido definidos formalmente y se identifica como un resultado teórico demostrado y que permite hacer de lado el cálculo de integrales mediante el límite de sumas de Riemann. Sin que pensemos en que esto deja de ser importante, el sólo verlo de esa manera no rescata el significado primario del teorema, significado que hace entender su naturalidad y no ver en él una de esas curiosidades que se dan en las Matemáticas.

Una presentación así, deja la impresión de que el estudiante entiende un concepto con sólo darle su definición, en términos de otros conceptos previamente definidos, y que comprende un resultado al presentarle su demostración; esto es, su deducción lógica a partir de otros resultados previamente demostrados; y que tal entendimiento y comprensión, permitirán al estudiante aplicar las matemáticas.

Imaz y Moreno (2009), describen amenamente, a manera de drama educativo, esta preocupación por la formalización que ha ocasionado persistentes y densas patologías en el sistema educativo: indigestión crónica por exceso de rigor, desorden inmunológico por alergia a los infinitesimales, y atrofia muscular atípica reflejada en aversión al estudio del Cálculo. La enseñanza del Cálculo está en deuda, declaran, existen problemas que se han derivado de una confusión:

Olvidarse de los orígenes del Cálculo y sustituirlos por el aparato formal del Análisis Matemático derivado del Cálculo.

Llama la atención que sea justamente ante la circunstancia de enfrentar el trabajo docente, que matemáticos como Cauchy y Dedekind reconocen la necesidad de una organización de las ideas buscando la claridad conceptual, tomando conciencia de la urgencia de descansar el discurso del Cálculo sobre bases sólidas; pero la finalidad de ello…¿era la enseñanza? Dedekind (1963), muestra, explícitamente, su convicción de la diferencia entre el proceso de fundamentación y el proceso didáctico, al declarar en su obra sobre la Continuidad y los Números Irracionales, lo siguiente:

> Aún ahora el recurso de la intuición geométrica en una primera presentación del Cálculo Diferencial lo considero extremadamente útil, desde el punto de vista didáctico, y por tanto indispensable, si uno no desea perder mucho tiempo. Pero nadie negará que esta forma de introducción al Cálculo Diferencial no puede pretender ser científica (Dedekind, 1963, p.1).

Sin embargo, esa convicción parece no haber ganado su lugar en las instituciones educativas y, a la fecha, los libros de texto persisten en dictar a los profesores un discurso que se presupone adecuado para el aprendizaje. Un nuevo paradigma en la manera de "hacer matemáticas" arribó al aula, y la fundamentación tomó su lugar obviando la comprensión.

Salinas y Alanís (2009), identifican como un paradigma tradicional de enseñanza del Cálculo a una práctica que, si bien no se acaba de desprender de una estructuración formal y rigurosa, en el día con día del aula defiende la eficiencia de los cursos al ejercitar en el estudiante procedimientos rutinarios para resolver problemas estereotipados. Estos problemas, enmarcados en una representación algebraica del conocimiento del Cálculo, privilegian una enseñanza mecanicista centrada en prácticas algorítmicas y algebraicas, seguramente muy condicionada por la necesidad de evaluación del aprendizaje en periodos y condiciones establecidas por la institución educativa. Los estudiantes están habituados a realizar mecánicamente rutinas sin significado real y este aprendizaje sin comprensión ha encendido la alarma. Artigue (2003), señala el rango de actuación de un sentimiento de crisis en la enseñanza-aprendizaje del Cálculo que trasciende las diferencias culturales. Nuevamente, la comprensión de las ideas parece haber quedado subordinada ante la eficiencia escolar.

A nuestro juicio, el paradigma tradicional de enseñanza del Cálculo ha perdido credibilidad como promotor del aprendizaje escolar. Numerosos estudios reportan dificultades en el aprendizaje de las nociones sobre las cuales se ha logrado estructurar el campo conceptual del Análisis. Como ejemplo, Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008), presentan una revisión organizada de aportes de diferentes investigaciones relacionadas con las dificultades de los estudiantes para comprender la derivada. A su vez, numerosas innovaciones en la enseñanza del Cálculo siguen generándose buscando aliviar la problemática educativa; entre ellas, las inscritas en la Reforma de Cálculo en los Estados Unidos, movimiento cuyo inicio puede ubicarse en la reunión que se celebró en la Universidad de Tulane (Douglas, 1987), y que ha generado más libros de texto que pelean la originalidad de su acercamiento. Contra lo que se podría pensar, y desear, la mayoría de esas innovaciones se hicieron independientemente de los trabajos de investigación (Artigue, 1995).

En México también ha habido innovaciones en la enseñanza del Cálculo que han surgido como reacciones contra los enfoques formal y mecanicista de la enseñanza de las Matemáticas. En este artículo, queremos presentar una propuesta de innovación que tiene la particularidad de haber surgido y estar evolucionando ante la consideración de los resultados de la investigación en Matemática Educativa. Particularmente las investigaciones doctorales de corte epistemológico de Alanís (1996) y Pulido (1997), han dado luz para valorar aquellos orígenes del Cálculo que quedaron opacados por la fundamentación y que buscamos rescatar mediante una estructura curricular diferente, ofreciendo un acercamiento donde se integren, didácticamente hablando, ideas que llevaron a Newton y Leibniz a la creación de sus respectivos Cálculos.

Con este trabajo nos unimos a la conclusión que Imaz y Moreno extraen en relación al artículo de Roh (2008), siendo este representativo del tipo de investigación enmarcada en el paradigma tradicional:

> …si los estudiantes no adoptan el concepto formal de límite, si no lo aplican, si las imágenes dinámicas (como las de Newton) no capturan el significado de la noción formal de límite, *entonces quizá haya que abandonar ese acercamiento curricular al cálculo* (Imaz y Moreno, 2009, p. 110).

En lo que sigue discurriremos sobre algunos elementos que han apoyado la conformación de la estructura de la propuesta y el modo de desarrollarla en el aula. Puntualizaremos sobre los contenidos de la misma, ubicándolos acorde a lo que distinguiremos como acercamiento newtoniano y leibniziano. Intentaremos clarificar la manera en que estos acercamientos han sido integrados, y terminaremos emitiendo algunas reflexiones sobre la propuesta y sus alcances.

2. Fundamentos de la propuesta

Quienes hemos estado participando en la construcción de la propuesta, tuvimos que reflexionar sobre nuestra concepción de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas; reflexión que encontramos muy relacionada con nuestra concepción de la Matemática. Pensamos la enseñanza como un proceso centrado en la producción de conocimientos y su evolución en saberes, todo ello en el ámbito escolar. En este sentido, dejamos detrás el ansia por mostrar, de inicio, un saber previamente construido y optamos por lograr acercar al estudiante a la producción de un conocimiento que sea propenso a evolucionar y apto para reconocer en el saber matemático un significado útil.

La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Guy Brousseau, distingue el conocimiento del saber: el conocimiento se produce en una situación particular específica; en cambio el saber, es un producto cultural que ya ha sido previamente estructurado y organizado. Sadovsky (2005), desarrolla una interpretación de algunas ideas en esta teoría y es por su trabajo que haremos referencia a ciertos elementos de la misma que apoyan nuestra visión.

Sadovsky (2005), señala que los elementos centrales de la TSD quedan esbozados a partir de tres hipótesis: la primera establece que el estudiante aprende adaptándose a un *medio* que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. En este sentido, nos interesa fomentar la interacción del estudiante con ese medio del cual el conocimiento pueda ser construido. Esta visión es muy acorde a nuevas tendencias educativas donde se proclama el aprendizaje activo o el papel protagónico del estudiante en su proceso de aprendizaje; sin embargo, la idea de un medio que procure la construcción, es algo que la TSD aporta de manera singular.

Como una segunda hipótesis de la TSD, se entiende que un medio sin intenciones didácticas es insuficiente para inducir en el estudiante todos los conocimientos culturales que se desea que él adquiera. En este sentido, se rescata la posición del profesor como representante del saber matemático y su responsabilidad de imprimir al medio aquéllas características que permitan el logro de una intención de aprendizaje previamente concebida. El papel del profesor no acaba en el diseño, pues al llevarle al aula se producirán conocimientos como respuesta a situaciones particulares y falta lograr su evolución en un saber matemático, lo que significa arribar a un sistema organizado de conocimientos que permiten abordar cuestiones que van mucho más allá de los contextos que hicieron posible la producción de tales conocimientos. Este asunto no emerge de manera automática como producto de la interacción con una situación específica sino que se requiere de un trabajo de reflexión sobre las situaciones y sobre las acciones realizadas a propósito de las mismas. Será la interacción entre profesor, estudiante y conocimiento lo que brinde esta oportunidad para la evolución de conocimiento en saber.

La tercera hipótesis de la TSD plantea que para todo conocimiento es posible construir una situación fundamental, que puede comunicarse sin apelar a dicho conocimiento y para la cual éste determina la estrategia óptima. Sadovsky (2005), comenta sobre los alcances de la noción de situación fundamental; y es a través de ello, que podemos ahora puntualizar que nuestra propuesta es que el estudiante se vea enfrentado a una problemática de la que surja el conocimiento relacionado con el Cálculo, como la estrategia óptima para dar solución a la problemática en cuestión. No se trata de construir diversas situaciones haciendo surgir secuencialmente nociones aisladas del Cálculo. Se trata, más bien, de encontrar aquélla problemática que permita el surgimiento del Cálculo en sí, como la estrategia óptima de solución; en ese sentido, nociones y procesos deben surgir relacionados y ubicados desde una perspectiva global, acorde a la cual se identifica su pertinencia.

En estas hipótesis se advierte que Brousseau modela la producción de conocimientos tomando los supuestos centrales de la epistemología genética de Jean Piaget, y refiere a la constitución del conocimiento matemático como el resultado del reconocimiento, abordaje y resolución de problemas.

Además, reconoce la necesidad de evolución de ese conocimiento en el saber, esto es, en la Matemática, la cual está siendo concebida como un conjunto organizado de saberes producidos por la cultura. Hemos observado qué posiciones sobre el aprendizaje y la enseñanza plantea el marco de la TSD, además de la concepción de la Matemática en que se sostiene.

Como sugerencia didáctica, que desprendemos de lo comentado sobre la teoría de Brousseau, proponemos que los contenidos de los cursos de Matemáticas sean desarrollados alrededor de un conjunto de problemas ordenados, de acuerdo a una estructura conformada por tres partes:

la primera que sea la ocasión para que los conocimientos emerjan como respuesta a problemas particulares; la segunda, para reorganizar los conocimientos en saberes; y la tercera para abordar problemas en contextos distintos a los que permitieron la emergencia de los conocimientos.

Aplicar esta sugerencia a los cursos de Cálculo requiere de una reestructuración del contenido tradicional de los mismos, lo que por otra parte es acorde al hecho histórico de que el Cálculo incluye tres elementos principales: un conjunto de algoritmos (un cálculo), una teoría para explicar por qué las reglas (algoritmos) funcionan, y finalmente las aplicaciones (de la teoría y de las reglas) a problemas fundamentales de la ciencia (Kleiner, 2001).

Lo anterior es también acorde a las tendencias actuales en la filosofía de las Matemáticas que caracterizan a esta ciencia, ante todo, como una actividad humana involucrada en la resolución de problemas; problemas que se pueden referir al mundo natural y social o bien pueden ser internos a la propia Matemática. Es como respuesta a estos problemas externos o internos que los objetos matemáticos surgen y evolucionan progresivamente: procedimientos, conceptos y teorías. De este modo, si por una parte es cierto que las Matemáticas son un lenguaje, no obstante, este lenguaje no es a priori, sino que se ha construido para comunicar los problemas y sus soluciones; por otra parte, si bien las Matemáticas son un sistema conceptual lógicamente estructurado, tal sistema emerge de la actividad de matematización (Godino, 2003).

Conscientes de lo anterior, se ha vertebrado la propuesta a través un conjunto de problemas que puedan ser abordados por los estudiantes, y favorezcan el que emerjan y evolucionen los procedimientos y conceptos sobre los cuales, finalmente, el Cálculo logró estructurarse.

Históricamente, los problemas que condujeron al surgimiento y desarrollo del Cálculo fueron de carácter geométrico, como el determinar la recta tangente a una curva, el cálculo del área de una región y el cálculo del volumen de un sólido; también se contemplan problemas relacionados con el cálculo de máximos y mínimos y, además, problemas relativos al *cambio* de las magnitudes continuas. Desde luego que, a estos problemas, habrá que agregar aquéllos otros que condujeron al desarrollo de una teoría formal de *límites* en el siglo XIX, teoría que constituyó el fundamento de *uno* de los acercamientos con el que fueron abordados los problemas antes mencionados (Kaput, 1994).

Se dice *uno* de los acercamientos porque tales problemas fueron abordados por Newton y Leibniz con ideas y estilos diferentes, dando lugar a dos acercamientos distintos que nombramos como el Cálculo *newtoniano* y el Cálculo *leibniziano*. Apoyamos tal distinción al observar que en su obra "De quadratura curvarum", Newton declara la diferencia de sus consideraciones con respecto a otras:

> No considero a las magnitudes matemáticas como formadas por partes, por pequeñas que sean, sino descritas por un movimiento continuo. Las líneas son descritas y engendradas, no por yuxtaposición de sus partes, sino por el movimiento continuo de puntos; las superficies por el movimiento de líneas; los sólidos por el movimiento de superficies; los ángulos por la rotación de sus lados; los tiempos por un fluir continuo; y así en otras magnitudes. Esta génesis realmente se da en la naturaleza de las cosas, y se ve a diario en el movimiento de los cuerpos (Struik, 1986, p. 303).

En la propuesta que aquí se presenta, se entenderá por acercamiento newtoniano aquel que se desarrolla tomando como problemática el *predecir* el valor de una magnitud que está cambiando respecto de otra; en esta situación, se conoce la *razón* con la cual está cambiando la magnitud; o bien, se conoce el modo en cómo la magnitud está relacionada con sus sucesivas *razones de cambio*. Por acercamiento leibniziano se entenderá aquel que se desarrolla tomando como problemática el *cuantificar* una cualidad de un todo dividiéndolo en un número infinito de partes infinitamente pequeñas, partes para las cuales es posible cuantificar la cualidad en cuestión.

Ambos acercamientos se pueden desarrollar de manera independiente y dar solución a los problemas antes señalados. Inicialmente, nuestra propuesta sólo se desarrollaba en la versión newtoniana. Actualmente integra ambas versiones a fin de aprovechar bondades de un acercamiento ante limitaciones del otro, dicho lo anterior con relación a condiciones didácticas. Alanís (1996), establece los lineamientos para desarrollar el acercamiento newtoniano, y Pulido (1997), los correspondientes al acercamiento leibniziano; y será su integración lo que permita, en particular, resignificar el Teorema Fundamental del Cálculo con la síntesis de estos dos acercamientos escolares de los contenidos del Cálculo.

Aunque en este trabajo se centra la atención en el contenido a enseñar, cabe decir que en las implementaciones de la propuesta, los problemas son abordados por los estudiantes primero de manera individual, después, en equipos de dos o tres estudiantes y finalmente, el profesor realiza una discusión entre los equipos para llegar a establecer la solución socialmente aceptada. Esto favorece que los conocimientos construidos por los estudiantes puedan ser presentados en su calidad de saber matemático.

Esta tónica que caracteriza el cómo enseñar en la propuesta, es acorde a algunos principios del aprendizaje constructivista. Según Piaget, los seres humanos son capaces de construir nuevo conocimiento reflexionando sobre sus acciones físicas y mentales; este proceso de construcción involucra un conflicto cognitivo, una reflexión y una reorganización conceptual. Según Vygotsky, es a través de las interacciones sociales que los seres humanos construyen significado de las situaciones que enfrentan, resuelven conflictos, adoptan las perspectivas de otros y negocian los significados compartidos; estos significados, son continuamente modificados a medida que los seres humanos intenten darle sentido a sus experiencias mientras interactúan con otros (Muthukrishna y Borkowski, 1995).

Así, en el abordaje individual de los problemas se estará considerando lo dicho por Piaget, mientras que en el abordaje en equipo de los problemas, y la puesta en común de su solución por parte del profesor, se estará considerando lo dicho por Vygotsky.

El énfasis de la propuesta en afectar el qué enseñar es debido a que quienes han estado participando en su construcción, al igual que otros matemáticos educativos, consideran que las causas de los nada halagadores resultados de la enseñanza tradicional de las Matemáticas, no son sólo de carácter psico-pedagógico, sino también de carácter epistemológico. En tal sentido, consideran "fundamental problematizar el propio conocimiento matemático; es decir, no considerarlo como transparente" (Contreras y Ordóñez, 2006, p. 67).

3. Descripción de la propuesta

La propuesta está dividida en dos grandes partes que pueden distinguirse porque desarrollan uno de los acercamientos, el newtoniano o el leibniziano; sin embargo, como se ha comentado, ambas partes incorporan elementos del otro acercamiento para potenciar su efectividad.

Ambas partes tienen la misma estructura que consta de tres módulos titulados: los problemas, esbozo de la teoría y aplicaciones. Esta estructura alude al surgimiento y evolución de los contenidos. De este modo, en cada una de las partes, el primer módulo corresponde con los conocimientos que aparecen como respuesta a problemas particulares; en el segundo módulo se pretende que los conocimientos sean transformados en saberes; y, en el tercer módulo se abordan cuestiones que van mucho más allá de los contextos que hicieron aparecer a los conocimientos en el primer módulo. En la tabla 1 se muestra los contenidos específicos de ambas partes.

Cálculo de una variable			
Parte I. Cálculo newtoniano		**Parte II. Cálculo leibniziano**	
Módulo 1. Los problemas		**Módulo 1. Los problemas**	
1.1	El Cambio Uniforme	1.1	Longitud de arco
1.2	Valor aproximado del Cambio Acumulado	1.2	Área de una región plana
1.3	Valor exacto del Cambio Acumulado. Caso Polinomial	1.3	Volumen de sólidos de revolución
1.4	Análisis Cualitativo del Cambio	1.4	Masa de una barra
1.5	El Método de Euler	1.5	Fuerza hidrostática
Módulo 2. Esbozo de la teoría		**Módulo 2. Esbozo de la teoría**	
2.1	La Derivada	2.1	La Integral
2.2	Reglas básicas para derivar	2.2	Propiedades de la Integral
2.3	Derivadas de algunas funciones especiales	2.3	Teorema Fundamental del Cálculo
2.4	Teoremas sobre Derivadas	2.4	Técnicas para integrar
2.5	Antiderivadas	2.5	Serie de Taylor
Módulo 3. Aplicaciones		**Módulo 3. Aplicaciones**	
3.1	Análisis de Funciones	3.1	Área superficial de sólidos de revolución
3.2	Valores Máximos y Mínimos	3.2	Trabajo mecánico
3.3	Valor exacto del Cambio Acumulado	3.3	Centro de masa

Tabla 1: Estructura de la propuesta

3.1. El acercamiento newtoniano

Los problemas que conforman el primer módulo de este acercamiento, han sido elaborados de acuerdo con las implicaciones didácticas del análisis epistemológico, realizado por Alanís (1996). En tal sentido, los problemas se vertebran alrededor de ir construyendo una respuesta cada vez más elaborada a la pregunta: *¿cuál va a ser el valor de una magnitud que está cambiando?* Se ejemplifica esta problemática de predicción con diferentes contextos relacionados con variadas magnitudes.

En el punto 1.1, titulado Cambio Uniforme, los estudiantes trabajan en un problema donde se llega a construir la respuesta al problema de predicción para el caso en el que la magnitud en consideración cambia a *razón constante* respecto de otra magnitud. Si llamamos $\boldsymbol{M}$ a esa magnitud y $\boldsymbol{x}$ a la magnitud respecto de la cual está cambiando, entonces $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M_0} + \boldsymbol{r}\ \boldsymbol{x}$ donde $\boldsymbol{M_0}$ es el valor de $\boldsymbol{M}$ cuando $\boldsymbol{x} = 0$ y $\boldsymbol{r}$ representa el valor de la razón constante con la cual está cambiando $\boldsymbol{M}$ respecto de $\boldsymbol{x}$. En particular, se tiene que el cambio que experimenta la magnitud en el intervalo $[a; b]$ es igual a $\Delta \boldsymbol{M}\,[a; b] = \boldsymbol{r}\,(b - a)$; es decir, que cuando una magnitud cambia a razón constante, lo que cambia en un intervalo es igual al producto de dicha razón constante por la longitud del intervalo en cuestión; de esta forma el valor de la magnitud en $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ se puede predecir mediante

$$\boldsymbol{M}(b) = \boldsymbol{M}(a) + \Delta \boldsymbol{M}\,[a; b] = \boldsymbol{M}(a) + \boldsymbol{r}\,(b - a)$$

En el punto 1.2 se considera la situación en que la razón con la cual cambia una magnitud *no* sea constante. Para abordar el problema de predicción del cambio que la magnitud $\boldsymbol{M}$ experimenta en el intervalo $[a; b]$ se procede a poner en juego la idea de suponer que en pequeños subintervalos de $[a; b]$ la razón con la cual cambia la magnitud fuese constante y así construir un procedimiento para calcular aproximadamente el cambio $\Delta \boldsymbol{M}\,[a; b]$ de la magnitud en el intervalo completo. Si $\boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{x})$ representa la razón de cambio que es variable, y se divide el intervalo $[a; b]$ mediante: $a = \boldsymbol{x}_0 < \boldsymbol{x}_1 < \boldsymbol{x}_2 < \ldots < \boldsymbol{x}_n = b$, entonces

$$\Delta \boldsymbol{M}[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}] \approx \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{x}_{i-1})(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1})$$

Vale la pena enfatizar que si de entrada un intervalo, digamos [$\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}$], es pequeño, entonces $\boldsymbol{M(x+\Delta x)} \approx \boldsymbol{M(x)} + \boldsymbol{r(x)\Delta x}$. Este hecho lo referimos como la *idea fundamental* del Cálculo en esta versión escolar del mismo. Esta idea es en esencia la misma que ha sido reconocida por los suecos Hoffman, Johnson y Logg (2004), como "el corazón del Cálculo" en su libro Dreams of Calculus el cual escriben deseosos por "exhibir algunos aspectos clave de la educación matemática del hoy y presentar algunos elementos constructivos para ayudar a crear un clima más fructífero para el debate y la reforma" (p. 5).

En el punto 1.3 de nuestra propuesta se llega a observar que con el procedimiento numérico ejercitado en el punto anterior y una nueva manera de pensar, es posible en ciertos casos calcular el valor exacto de lo que cambia una magnitud cuando la razón con la cual cambia respecto a otra no es constante. Se concibe la mejora del proceso de aproximación generando una sucesión de valores que tienden al valor exacto de $\Delta \boldsymbol{M}$ [a; b] a través de considerar subintervalos cada vez más y más pequeños. En particular, cuando la razón de cambio está dada por una función potencia multiplicada por una constante, esto es, $\boldsymbol{r}$ ($\boldsymbol{x}$) = $\boldsymbol{k}$ $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}$ con $\boldsymbol{n}$ número natural, el cálculo exacto de $\Delta \boldsymbol{M}$ [a; b] es posible de ser realizado. Calculado este valor, se presenta a los estudiantes un contexto apropiado (llenado de tanques de forma cilíndrica) y de esta forma podrán determinar el valor de una magnitud que está cambiando cuando la razón con la cual cambia está dada por una función polinomial. Identifican a la función "predictora" y observan que esta función es también una función polinomial.

Hasta este momento, si $\boldsymbol{M}$ es la magnitud que está cambiando respecto de otra magnitud $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{M}_0$ es el valor de $\boldsymbol{M}$ cuando $\boldsymbol{x} = 0$ y $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = a_1 + a_2 \boldsymbol{x} + a_3 \boldsymbol{x}^2 + \ldots + a_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n-1}}$ es la razón con la cual está cambiando $\boldsymbol{M}$ respecto a $\boldsymbol{x}$, entonces:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{M}_0 + a_1 \boldsymbol{x} + \frac{1}{2} a_2 \boldsymbol{x}^2 + \frac{1}{3} a_3 \boldsymbol{x}^3 + \ldots + \frac{1}{\boldsymbol{n}} a_n \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}$$

En el punto 1.4, a través de las situaciones presentadas a los estudiantes se reconocerán de facto las relaciones entre una magnitud que está cambiando y la razón con la cual está cambiando; por ejemplo, si la razón con la cual cambia una magnitud es positiva, entonces la magnitud está creciendo. Estas relaciones serán interpretadas en la gráfica de ambas funciones, de la magnitud y de su razón de cambio. Tal reconocimiento posibilitará un estudio "exhaustivo" del comportamiento de las magnitudes; si crecen o decrecen, si lo hacen cada vez más rápido o cada vez más lento. De momento esto es posible para aquellas magnitudes cuya función predictora es una función polinomial.

En el punto 1.5 se presentan a los estudiantes situaciones donde deberán usar el método de Euler para calcular *aproximadamente* lo que cambia una magnitud cuando no se conoce explícitamente su razón de cambio, pero sí se conoce cómo está relacionada la magnitud con sus sucesivas razones de cambio. Este método descansa en la idea fundamental que hemos desentrañado y que ha sido explicitada en el punto 1.2. En este apartado aparecen la función exponencial y la función trigonométrica seno al abordar el problema de predicción en el contexto de crecimiento de poblaciones y el contexto de un sistema masa-resorte, respectivamente. La función exponencial aparece como respuesta al problema de predecir el valor de una magnitud que está cambiando de tal manera que su razón de cambio es proporcional a la magnitud misma. La función trigonométrica seno aparece como respuesta al problema de predecir el valor de una magnitud que está cambiando de tal manera que su segunda razón de cambio es proporcional a la magnitud misma.

En el segundo módulo de esta primera parte de la propuesta, llamado Esbozo de la teoría, se conceptualiza la derivada de una función como la precisión y formalización de la noción razón instantánea de cambio, noción cuyo trato intuitivo fue suficiente para desarrollar el primer módulo tal y como se acaba de describir. Los apartados de este segundo módulo pueden coincidir con los contenidos y objetivos de las secciones en que se divide el capítulo de la Derivada en los libros tradicionales de Cálculo, mas no así en la forma en cómo dichos contenidos serán desarrollados.

El tercer módulo corresponde con las aplicaciones en las cuales se abordan el tipo de problemas del primer módulo pero en contextos diferentes, y además al analizarlas y resolverlas se cuenta con herramientas y simbología explícitas para ello. Cabe resaltar que el conjunto de magnitudes para las cuales se puede calcular el valor exacto de lo que cambian, se amplía grandemente al conjunto de magnitudes para las cuales se puede obtener una *antiderivada* de la función que da cuenta de su razón de cambio. En particular se tiene que si la magnitud $\boldsymbol{M}$ está cambiando respecto a la magnitud $\boldsymbol{x}$, es decir, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x})$ y si $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$ da cuenta de la razón con la cual cambia $\boldsymbol{M}$ respecto de $\boldsymbol{x}$, entonces, siendo $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$ una antiderivada de $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$ se tiene que

$$\Delta\boldsymbol{M}\,[a; b] = \boldsymbol{R}(b) - \boldsymbol{R}(a), \text{ donde: } \quad \boldsymbol{R}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}).$$

En Salinas, Alanís y otros (2002), se presenta a detalle esta primera parte de la propuesta correspondiente a la versión newtoniana.

3.2. El acercamiento leibniziano

Con base en lo establecido por Pulido (1997), se desprenden los lineamientos para desarrollar esta versión leibniziana del Cálculo que se integra con fines didácticos a la versión newtoniana. De esta segunda parte de la propuesta se describirá sólo el primer módulo, considerando que acerca de los módulos restantes se tendrían comentarios análogos a los correspondientes a la versión newtoniana, pero en relación al Cálculo Integral.

En el primer módulo, los problemas, se puede observar un desarrollo acorde a la observación didáctica hecha por Kleiner (2001), cuando se refiere a la invención del Cálculo por parte de Newton y Leibniz:

> Y así como hay un tiempo preciso para la síntesis en Matemáticas en la historia, así debería haber uno en la pedagogía. Los antecesores de Newton y Leibniz no sintetizaron principalmente porque no tenían suficiente ejemplos que pudieran haber requerido de una síntesis. Es un lugar común, pero merece repetirse que deberíamos dar a los estudiantes ejemplos – muchos ejemplos, en diferentes contextos – antes de que definamos, generalicemos o demostremos (p. 143).

Así, en este módulo se presentan más problemas que los que se abordan en la enseñanza tradicional para conceptualizar a la integral, pero lo más importante es la manera en cómo dichos problemas serán resueltos.

A continuación ilustraremos la idea con la que son resueltos tomando como ejemplo el cálculo del área de una región debajo de la gráfica de una función continua no negativa y sobre un intervalo, ejemplo que muy seguramente es familiar por su acentuado uso en la presentación tradicional dando un significado geométrico a la integral. Recordando esa presentación, intentaremos señalar similitudes pero sobre todo, las diferencias en nuestro enfoque.

La región se divide en ***n*** partes, para ello se divide el intervalo sobre el que está la región en ***n*** subintervalos de igual longitud. Para cada subintervalo se va a considerar la parte de la región que está sobre él y bajo la gráfica de la función. Se calcula un valor aproximado del área de esa parte al considerar el trapecio determinado por el segmento de recta que une los dos puntos de la gráfica de la función correspondientes a los extremos del subintervalo. Un valor aproximado del área de toda la región se obtiene al sumar las áreas aproximadas de las partes en que fue dividida. El valor exacto del área de la región es el número al que tienden las aproximaciones cuando ***n*** tiende a infinito.

Aun y cuando al momento hemos planteado una diferencia con la enseñanza tradicional de la integral al no considerar áreas de rectángulos sino áreas de trapecios, una diferencia fundamental será utilizada cuando enseguida se propone a los estudiantes *otra* manera de obtener la exactitud de ese cálculo. Siguiendo a Leibniz, trozos infinitamente pequeños de "curvas" *son* segmentos de rectas; llevando al extremo esta idea, se puede concebir a la región dividida ahora en un número infinito de partes infinitamente pequeñas. En este caso, las partes de la región determinadas por los subintervalos infinitamente pequeños *son* trapecios. Se calcula para cada una de esas partes el valor exacto del área y, consecuentemente, al sumar estas áreas se obtiene el valor exacto del área de toda la región.

4. La integración didáctica

Se había comentado que la versión newtoniana y la versión leibniziana del Cálculo se pueden desarrollar independientemente una de la otra; pero en la propuesta que aquí se presenta, la intención es integrarlas a fin de aprovechar las bondades "didácticas" de ambas en el momento adecuado.

Antes de explicitar los elementos de una versión que se incorporan en la otra, es importante remarcar que los calificativos de newtoniano y leibniziano no aluden a un seguimiento fiel del trabajo de estos matemáticos. El calificativo de newtoniano responde a que en esa versión, al igual que en el trabajo de Newton, la atención se centra en el estudio del cambio; el constructo clave en ese estudio fue la fluxión, lo que a la postre se constituyó en la *derivada*. Por otra parte, el calificativo de leibniziano es porque en esa versión se le da cabida a las cantidades infinitamente pequeñas, los *diferenciales*, constructo clave en el Cálculo de Leibniz. Lo dicho no quita que en ambas versiones se rescaten ideas importantes en los trabajos de estos dos grandes genios.

Si bien los diferenciales son, como se acaba de decir, el constructo clave del Cálculo de Leibniz, en la propuesta aparecen desde la primera parte, es decir, en la versión newtoniana. Para ser precisos aparecen en el segundo módulo: el esbozo de la teoría. En él, si bien se comienza definiendo la derivada como un límite, pronto se sustituye esta definición por aquélla que rescata el significado de la *derivada* como un *cociente de diferenciales*; esto permitirá establecer con mucha mayor fluidez las reglas para derivar y los teoremas básicos sobre derivadas. En este sentido la versión newtoniana se hace más efectiva incorporando elementos del Cálculo de Leibniz.

Si bien es cierto que se puede dar un trato formal y riguroso a las cantidades infinitamente pequeñas (Keisler, 2000), en esta propuesta se hará un trato más laxo de este tipo de números; bastará aceptar su existencia, operarlos algebraicamente como se operan los números ordinarios y eliminar de una expresión polinomial en un diferencial aquellos términos de grado mayor o igual a dos. Estos supuestos están en conformidad con la idea de Leibniz de ver a las curvas como polígonos de un número infinito de lados infinitamente pequeños (Kleiner, 2001).

Veamos ahora cómo la versión leibniziana se puede hacer más efectiva incorporando en ella elementos del Cálculo de Newton. Para ello recordemos simbólicamente, cómo se llegó a establecer el valor exacto del área de una región.

Si el área $\boldsymbol{A}$ de una región bajo la gráfica de una función continua no negativa $\boldsymbol{y = f(x)}$ se visualiza como una magnitud que está cambiando respecto a la magnitud (variable) $\boldsymbol{x}$, esto es, si $\boldsymbol{A = A(x)}$, entonces, el área de la región $\boldsymbol{R}$ debajo de la gráfica de $\boldsymbol{f(x)}$ y sobre el intervalo $[a; b]$ es justamente lo que cambia la magnitud $\boldsymbol{A}$ en el intervalo $[a; b]$.

Como ya se dijo en la descripción de la versión newtoniana, el valor exacto de ese cambio se puede obtener si se conoce y se puede obtener una antiderivada de la razón con la cual cambia $\boldsymbol{A}$ respecto a $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x})$.

Ahora bien, resulta que las áreas de los trapecios infinitamente pequeños en los que se dividió $\boldsymbol{R}$ para calcular su área, son justamente los cambios infinitamente pequeños que experimenta $\boldsymbol{A}$ en los subintervalos de $\boldsymbol{x}$ correspondientes. Usando las reglas estipuladas para los diferenciales se puede probar que las áreas de esos trapecios son “iguales” a las de los rectángulos con base en los correspondientes subintervalos y altura igual al valor de la función en cualquiera de los extremos de esos subintervalos. De lo anterior se concluye que $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, esto es que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ es justamente la razón de cambio de la magnitud área $\boldsymbol{A}$, vista como función de $\boldsymbol{x}$.

Así, el cálculo exacto del área de la región $\boldsymbol{R}$ debajo de la gráfica de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ y sobre el intervalo $[a;\ b]$ queda garantizado si se puede obtener una antiderivada $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Finalmente este cálculo exacto se expresa simbólicamente así:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Cabe observar que el miembro de la izquierda de la anterior ecuación simboliza una suma infinita de cantidades infinitamente pequeñas.

Con esta misma idea son abordados los problemas del primer módulo de esta segunda parte de la propuesta y con ello se pretende que los estudiantes puedan resolver por propia cuenta nuevos problemas en los que dicha idea se puede poner en juego, lo cual se hará en el tercer módulo de las aplicaciones. El que los estudiantes apliquen dicho procedimiento depende desde luego en parte de la familiaridad que tengan con los contextos en los que se presentan los nuevos problemas. Cabe señalar que en implementaciones de la propuesta se ha logrado que estudiantes establezcan por propia cuenta la integral con la cual calcular el área superficial de un sólido de revolución, lo cual es difícil o imposible de lograr en los cursos tradicionales en los que la integral se define de entrada a través de las sumas de Riemann (Pulido, 1997).

5. Reflexión final

En las ramas de las Matemáticas que, como el Cálculo, tienen un origen "empírico", la comprensión de los objetos matemáticos no queda reducida a poder dar su definición en el caso de los conceptos, dar su demostración en el caso de los teoremas o poder implementarlos en el caso de los procedimientos. Para comprender un objeto matemático es necesario conocer el problema o clase de problemas que permitieron su surgimiento y evolución. Una comprensión tal es necesaria para aplicaciones creativas y efectivas de los objetos matemáticos en la resolución de nuevos problemas.

La propuesta que aquí se ha presentado pretende que los estudiantes aprendan con comprensión el Cálculo de una variable. En el papel lo ha logrado, pues quienes la hemos estado construyendo podemos decir ahora que comprendemos la derivada y la integral de una función no sólo porque podemos dar la definición de estos conceptos, o que comprendemos el Teorema Fundamental del Cálculo no sólo porque podemos enunciarlo y demostrarlo, o incluso, que comprendemos el procedimiento para calcular integrales no sólo porque lo podemos implementar. Podemos decir que comprendemos todos estos objetos matemáticos más bien porque conocemos problemas que los pueden hacer surgir y evolucionar en estrecha relación. Esos problemas y esa relación están "a la vista", precisamente, en el mismo enunciado del Teorema Fundamental del Cálculo.

En efecto, en Salinas, Alanís y otros (2002), se concretiza la propuesta en su versión newtoniana con cierto tinte leibniziano.

La portada de una de las ediciones de ese libro presenta el Teorema Fundamental de la siguiente manera:

$$f(t_1) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f'(t)dt\,.$$

Si leemos con comprensión este teorema, así escrito, diríamos: "el valor de una magnitud al final de un intervalo es igual al valor de la magnitud al inicio del intervalo más lo que cambia la magnitud en dicho intervalo. Ahora bien, lo que cambia la magnitud en dicho intervalo es igual a la suma de los cambios infinitamente pequeños que experimenta la magnitud en cada uno de los subintervalos infinitamente pequeños en los que se ha dividido todo el intervalo. Por otra parte estos cambios se pueden calcular porque al corresponder con subintervalos infinitamente pequeños, allí la razón con la cual cambia la magnitud es constante".

Esta lectura estaría comunicando la clase de problemas que se van a abordar en ese libro y la manera en cómo se va dar solución a ellos. En esa representación simbólica del Teorema Fundamental vemos cómo están relacionados los conceptos sobre los cuales el Cálculo se logró estructurar: funciones, derivadas e integrales.

En esa misma lectura se puede apreciar que el estudio del Cálculo que hemos propuesto en este escrito está restringido al de los fenómenos en los que la razón con la cual está cambiando una magnitud *varía continuamente* o bien, en términos formales, el estudio del Cálculo se está restringiendo al de las funciones cuya derivada es una función *continua*. Sabemos que no todas las funciones tienen esta propiedad, y más importante aún, sabemos que hay fenómenos en la naturaleza en los que las magnitudes no cambian de esa manera. Sin embargo, hemos decidido dejar estas observaciones para plantear el problema que hace ver que no sólo los conceptos, los procedimientos y los teoremas, sino también las teorías, siempre están en constante evolución.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Alanís, J. A. (1996). *La predicción: un hilo conductor para el rediseño de un del discurso escolar del cálculo*. Tesis Doctoral no publicada, CINVESTAV del IPN, México D.F., México.

Artigue, M. (1995) La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas),* pp. 97-140. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (2003). *Reaction. Learning and teaching analysis: What can we learn from the past in order to think about the future?* In D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B. R. Hodgson & G. Schubring (Eds.), One hundred years of l'enseignement mathématique: moments of mathematics education in the twentieth century. Monograph No. 39 (pp. 211-223). Génova, Italia: L'Enseignement Mathématique.

Contreras, A. y Ordóñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9*(1), 65-84.

Dedekind, R. (1963). *Essays on the theory of numbers.* New York, N. Y., EE.UU: Dover Publications, Inc.

Douglas, R. G. (Ed), (1987). *Toward a lean and lively calculus*. MAA Notes No. 6, Washington DC: Mathematical Association of America.

Godino, J. (2003). Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática. Recuperado el 29 de Octubre, 2008 de http://lem.usach.cl/biblioteca/BD/TEORIA%20DE%20LAS%20F%20SEMIOTICAS%20godino.pdf

Hoffman, J., Johnson, C., & Logg, A. (2004). *Dreams of Calculus. Perspectives on Mathematics Education.* Germany: Springer.

Ímaz, C. y Moreno, L. (2009). Sobre el desarrollo del Cálculo y su enseñanza. Revista *El Cálculo y su enseñanza,* 1, Artículo. Recuperado el 20 de enero de 2010, de http://www.matedu.cinvestav.mx/~elcalculoysuensenanza/

Kaput, J. (1994). Democratizing access to calculus: New routes to old roots. En H. A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 77-156). Hove, UK: Lawrence Erlbaum Associates.

Keisler, J. H. (2000). *Elementary calculus: an infinitesimal approach*. Recuperado el 12 de Octubre de 2007 de http://www.infinitesimals.com/

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics,* 48(2-3), 137-174.

Muthukrishna, N y Borkowski, J. (1995). Constructivism and the motivated transfer of skills. En M. Carr (Ed,), *Motivation in mathematics* (pp 63-87). Cresskill, England Hampton Press.

Pulido, R. (1997). *Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: la trasposición didáctica del diferencial en la física y matemática*. Tesis Doctoral no publicada, CINVESTAV del IPN, México D.F., México.

Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics,* 69, 217-233.

Sadovsky, P. (2005). La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En O. Kulesz (Ed.), *Reflexiones teóricas para la educación matemática*. (pp. 14-68). Buenos Aires, Argentina.: Libros del Zorzal.

Salinas, P. y Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12*(3), 355-382.

Salinas, P., Alanís J. A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J. C., y Garza, J. L. (2002). *Elementos del cálculo: reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza.* México: Trillas.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11*(2), 267-296.

Struik, D. (1986). *A source book in mathematics, 1200-1800.* Princeton, NJ: Princeton University Press.