Domaines de travail en analyse :
le filtre de la notion de fonction

Fabrice Vandebrouck
Université Paris Diderot
Laboratoire de Didactique André Revuz

Dans cet article[1], nous souhaitons faire un point sur quelques connaissances didactiques dans le domaine de l'analyse, à travers ce qui concerne plus précisément l'étude des fonctions numériques, afin d'investiguer des problèmes qui se posent à la transition lycée-université. Ce domaine a été très étudié depuis plusieurs décennies mais les caractéristiques, sans cesse changeantes, des populations étudiantes arrivant à l'université d'une part, et des contenus d'enseignements, tant au lycée qu'à l'université d'autre part, justifient que l'on s'y intéresse de façon continue et renouvelée.

Nous souhaitons, en spécifiant les domaines de travail en analyse qui traversent la scolarité, de la classe de troisième aux premières années de l'université, définir des questions de recherche qui se posent à nous. Ces questions concernent les niveaux de conceptualisation des connaissances, chez les élèves de terminale scientifique, dans le champ conceptuel des fonctions (Vergnaud 1991), et la corrélation entre ces niveaux de conceptualisation et la possibilité pour les élèves d'affronter les concepts travaillés en première année d'université. Nous nous appuyons pour ce faire sur des énoncés d'exercices, des sujets de baccalauréat, des partiels en L1 ainsi que des productions d'élèves et d'étudiants. Nous proposons deux dispositifs afin d'investiguer nos questions de recherche et nous donnons quelques premiers résultats à partir de l'un d'entre eux.

El Cálculo y su Enseñanza. Año 3 Enero-Diciembre © 2011, Cinvestav-IPN, México. P.p. 171-191

Fecha de recepción: 01-11-2011
Fecha de aceptación:04-01-2012

Nous commençons par rappeler des spécificités génériques, caractéristiques de la transition lycée université. Nous continuons par une étude didactique sur le thème des fonctions et les caractéristiques liées à cette notion, déjà pointées dans plusieurs travaux. Nous étendons cette « mise en relief »[2] du début de l'analyse entre lycée et université en définissant des domaines de travail, spécifiques d'une part des pratiques au lycée et d'autre part des pratiques attendues à l'université.

1) Quelques caractéristiques générale de la transition lycée - université

De nombreuses études ont déjà précisé les caractéristiques de cette transition (Artigue 1991, Artigue 2007, Gueudet 2008). D'un point de vue institutionnel, de nombreuses macro ruptures peuvent être identifiées : passage d'un cours avec un seul enseignant à des cours magistraux en amphi théâtre et à des travaux dirigés ; accélération du temps didactique avec un renouvellement rapide des objets d'enseignements qui oblige à des assimilations plus rapides, temps en présence des enseignants plus réduits, éventail des tâches plus large qui rend la routinisation beaucoup plus difficile qu'au lycée, cette dernière étant déléguée aux étudiants en travail personnel, qui se doivent de ce fait d'être plus autonomes face à leurs apprentissages.

[1] Cette communication est le fruit d'un travail collectif avec Stéphane Ginouillac, la commission inter irem université et le groupe irem de Paris 7 transition lycée université

[2] Robert introduit cette terminologie pour décrire ce travail du didacticien à mi chemin entre un travail purement didactique et un travail épistémologique

D'un point de vue plus didactique, Robert (1998) a pointé l'arrivée massive à l'université d'un nouveau type de notions mathématiques : les notions à la fois Formalisatrice, Unificatrices et Généralisatrices (FUG), spécifiquement toutes les notions d'algèbre linéaire : espace vectoriel, application linéaire… ces notions permettent en effet d'introduire plus de généralité, en unifiant différents objets antérieurs grâce à un nouveau formalisme, qui de fait simplifie les écritures mais peut aussi brouiller le sens pour les étudiants. Les notions de topologie, maintenant repoussées en L2 ou L3 sont aussi de telles notions (Bridoux 2005). A la transition entre la classe troisième et la classe de seconde, on peut d'ailleurs penser que la notion de fonction numérique est typiquement une notion FUG (Robert, travail en cours).

Robert a aussi relevé la distribution différente, entre lycée et université, au niveau des types de tâches proposées aux étudiants et au niveau des mises en fonctionnement des connaissances attendues : de tâches mettant en jeu des connaissances explicitées, souvent dans des applications immédiates, à des tâches mettant en jeu des connaissances à reconnaître (niveau disponible) et aussi à adapter (mélanger avec d'autres connaissances, introduire des intermédiaires, des étapes etc etc…). A l'université, de ce fait, les connaissances doivent être plus disponibles (mobilisables sans indice) et plus flexibles (notamment entre leurs cadres d'apparition et les registres de leurs représentations). Le caractère outil (Douady 1986) de certaines connaissances est valorisé à l'un des niveaux alors que c'est plutôt le caractère objet qui l'est à l'autre ou vice versa. A ce niveau didactique, Bloch (2005) a clarifié la complexité en terme de tâches et de mises en fonctionnement par l'introduction de 9 variables didactiques dont les valeurs différentes contribuent à « mesurer » la rupture entre lycée et université.

Enfin, on note le plus haut niveau de conceptualisation des connaissances à utiliser à l'université, qui va de pair avec une augmentation des exigences en terme de raisonnements, preuves, formalisations, langage... Nous revenons sur ce point dès le paragraphe suivant pour ce qui concerne la notion de fonction.

2) La notion complexe de fonction

La notion de fonction, en tant qu'objet de l'analyse, peut intervenir avec de nombreux cadres (Douady 1986) et se trouve connectée à deux autres objets essentiels du champ de l'analyse : les nombres réels (en particulier les limites) et les suites numériques. Ceci nécessite de prendre en compte le vaste champ conceptuel des fonctions et non la notion isolée. Les domaines de travail que nous définirons ne seront caractérisés que par rapport à la notion de fonction mais ils devront être entendus pour tout ce champ conceptuel. C'est une limite du travail à prendre en compte.

La notion de fonction nécessite également l'utilisation de plusieurs systèmes de représentations, ce qui fait l'une de ses spécificités essentielle : les représentations numériques (tableaux de valeurs), les représentations graphiques (courbes représentatives), les représentations algébriques (formules), les représentations symboliques (tableaux de variations) et les représentations formelles (f, g, $f \circ g$…). Les fonctions sont donc des objets complexes, encore en apprentissage lorsque les étudiants entrent à l'université. Leur conceptualisation requiert la rencontre et l'articulation de toutes ces représentations pour permettre le nécessaire détachement de l'objet et de ses représentations (Duval 1991).

A cette multitude de représentations possibles des fonctions s'ajoutent des points de vue différents sur les fonctions. Nous en distinguons quatre : ponctuel, global, local et surglobal.

Dans le premier point de vue, une fonction est une correspondance entre deux ensembles de nombres réels. C'est en cohérence avec la définition qui est donnée dans les manuels, aux niveaux des classes de troisième et de seconde. Les fonctions sont au début associées à des formules arithmétiques en acte, éventuellement paramétrées (par exemple $f(\lambda) = 2 \times \lambda + 5$). Un tableau de valeur est de ce point de vue un bon représentant pour une fonction. Avec le passage de l'arithmétique à l'algèbre, le point de vue ponctuel sur les fonctions s'étend, avec des formulations du type « quelque soit x, $f(x)$=… » (on dira qu'il s'agit d'un point de vue ponctuel universel).

Le second point de vue, global, est travaillé à partir du milieu de la classe de seconde et jusqu'à la classe de terminale, avec par exemple des fonctions paires, croissantes, polynômes, partout continues ou encore partout dérivables. Comme l'ont montré Coppé et al. (2007), les tableaux de variations sont de bons représentants des fonctions de ce point de vue, tandis que les courbes ou les expressions algébriques peuvent à la fois être vue ponctuellement et globalement : par exemple le graphe d'une fonction peut être tracé point par point mais doit être considéré globalement pour représenter la fonction en jeu et raisonner avec des propriétés classiques comme la parité ou la croissance. La formule algébrique peut également supporter ces deux points de vue, selon l'usage qui en est fait dans la pratique : écrire « pour tout x du domaine de définition, $f(x)$=…. » exprime un point de vue ponctuel universel sur la fonction f tandis qu'il est possible de « voir » l'expression algébrique comme une représentation globale de la fonction f et l'utiliser globalement - sans le « pour tout x » - par exemple pour calculer l'expression algébrique de la fonction dérivée f'. Bloch (2003) développe la même idée et le fait que les différents registres de représentation sont réducteurs ou producteurs par rapport aux deux points de vue ponctuel et global sur les fonctions.

Dans le troisième point de vue, les objets fonctions sont regardés localement : cela nécessite l'introduction de la notion de voisinage qui est au cœur des définitions de limite, continuité, dérivabilité, fonctions équivalentes ou négligeables, développements limités… qui sont des notions locales. Le point de vue surglobal est enfin celui qui permet de travailler sur des ensembles de fonctions : l'ensemble des fonctions continues, l'ensemble des applications linéaires d'un espace vectoriel dans un autre… nous ne nous y attarderons pas pour cet article.

Enfin, plusieurs niveaux de conceptualisation du concept traversent également la scolarité. Comme bons nombres des objets du champ de l'analyse (à nouveau notamment suites et limites), on dégage un niveau processus, produit par exemple par l'usage de représentations numériques des fonctions, et le niveau objet, déjà évoqué implicitement dans les paragraphes précédents, plutôt favorisé par un usage d'écritures formelles et symboliques, et que les étudiants doivent acquérir (Dubinsky 1991). Tall (1996) introduit aussi la notion de procepts pour qualifier les concepts, comme les formules algébriques ou les représentations graphiques, qui peuvent à la fois être manipulées comme des processus et comme des objets. Les procepts (formule algébrique et graphe pour nous) permettent ainsi de faire un pont entre les deux niveaux de conceptualisation et leur usage doit permettre un accès facilité au niveau objet.

3) Différents domaines de travail pour l'étude des fonctions au lycée

Le concept de fonction naît dans la scolarité française à la fin du collège et s'enrichit jusqu'à l'université. Cependant, des observations et des travaux (par exemple Praslon 2000, Bloch 2000) mettent en évidence la difficulté pour les étudiants du début de l'université d'entrer dans l'analyse locale, notamment l'étude locale des fonctions (fonctions négligeables, équivalentes, développements limités…). Ceci justifie d'investiguer en profondeur les notions liées aux fonctions que les élèves rencontrent au cours de leur scolarité, dès la classe de troisième, et la façon dont ces notions sont travaillées du collège à l'université (dépendance, variations, limites, continuité, dérivabilité…).

Les premiers travaux que nous avons menés avec la CI2U[3] (Vandebrouck 2006), à partir de l'étude de manuels scolaires actuels, de feuilles d'exercices du secondaire, de l'université et d'épreuves de baccalauréat, ont amené l'idée que le champ de l'analyse est maintenant divisé en trois grand domaines de travail, bien distincts, non hiérarchisés mais assez étanches. En reprenant pour l'instant la définition que fait Robert (2003) de « domaines de travail » en géométrie (ensemble auto consistant, cohérent, enseigné ou enseignable, spécifié par des fondements, un corps de définition, des modes de raisonnements et enfin un corps de problèmes que l'on peut résoudre en son sein), nous sommes amenés à dégager un niveau A1, caractéristique de l'analyse essentiellement enseignée et travaillée de la fin de collège jusqu'au début de la classe de première.

Dans ce domaine A1, à partir d'une introduction ensembliste de la notion de fonction, l'enjeu d'apprentissage semble être que les élèves entrent dans la pensée fonctionnelle, qu'ils dégagent le niveau de conceptualisation objet de la notion de fonction (notion FUG au sens de Robert 1998) et qu'ils adoptent un point de vue global sur cet objet, en articulant au maximum les multiples registres de représentations, en rencontrant des fonctions dans de nombreux cadres. Le gain d'un tel effort doit se faire sentir par des tâches de comparaisons de fonctions, des études de co variations ou encore par l'intérêt des propriétés que l'on peut mettre en jeu dès lors que l'on utilise une classification des fonctions : linéaires, affines, du 2nd degré, polynomiales… Cependant, comme dit Comin (2005, p 38) : « l'approche ensembliste de la notion de fonction par une mise en correspondance terme à terme des éléments de deux ensembles modélisée par un graphe évacue cette idée de contrainte entre deux grandeurs (…) nous faisons l'hypothèse que les pratiques qui sont proposées aux élèves portent sur un nombre fini de valeurs et éloignent les élèves de l'idée de variabilité et de continuité ». Selon lui, le travail dans le domaine A1 enfermerait donc les élèves dans un point de vue ponctuel sur les fonctions, voire ne leur permettrait pas d'accéder au niveau de conceptualisation objet. Les tâches de recherches d'image et d'antécédent en classe de seconde seraient par exemple surreprésentées au sein de ce domaine de travail.

Coppé et al. (2007) ont montré avec la même idée que des élèves de seconde ont plus de difficultés à utiliser le registre symbolique des tableaux de variations, qui fait travailler le caractère objet et le point de vue global sur les fonctions, que le registre numérique des tableaux de valeurs, qui donne un point de vue ponctuel et renvoi plutôt au niveau processus. En même temps, la conversion d'un tableau de variation à un autre système de représentation (algébrique, graphique et même numérique) semble être plus difficile que la conversion à partir d'une table de valeur. En seconde, le point de vue global et le niveau objet semblent donc être de réels enjeux dans l'apprentissage de la notion, au sein de ce premier domaine de travail. Les notions de parité ou de croissance sont par exemple des propriétés globales des fonctions qui peuvent être spécifiquement travaillées au sein de ce domaine. Bloch (2003) met aussi en évidence que les élèves ne considèrent que rarement la puissance du graphique au niveau global. Elle fait des propositions pour des séquences d'enseignement, supportées par un point de vue global du registre graphique. Elle pointe déjà le travail minime au niveau local et qui pourtant pourrait déjà être engagé dans ce domaine.

[3] Commission Inter IREM Université

S'ouvre cependant dès la classe de seconde (mais surtout à partir de la première) et jusqu'à l'université où il est complexifié, un domaine A2 très algébrisé, théoriquement formalisateur et simplificateur du domaine A1. Notre hypothèse est que le registre algébrique des fonctions s'y constitue en cadre (Douady, 1986) et qu'il masque le relief que l'enseignement veut donner à la notion de fonction en A1 : en particulier les deux points de vue ponctuel et global sur les objets fonctions, qui ne sont pas encore suffisamment repérés par les élèves en A1, ne sont plus suffisamment manipulés en A2.

Dans ce domaine A2, les notions locales sont aussi progressivement introduites : limite, continuité, dérivabilité, la dernière étant d'ailleurs introduite dans les derniers programmes avant la continuité. Cependant, ces notions locales sont aussi principalement mobilisées dans des exercices où les fonctions sont représentées et représentables par une formule algébrique, en général polynomiale, rationnelle ou radicale en classe de seconde. En effet, les programmes de lycée donnent depuis 1985 une importance à l'étude de fonctions stéréotypes (fonctions de référence), permettant par exemple une très forte algébrisation des calculs de limite par comparaison à ces fonctions de référence (Artigue 1993). Le point de vue à adopter, qu'il soit ponctuel, global ou local, peut être masqué par ces pratiques. Après 1990, le travail sur les fonctions de référence est un peu minimisé. La véritable activité au niveau local n'apparaît cependant pas réellement. Les représentations graphiques prennent une part importante dans les programmes pour illustrer des notions et des propriétés locales dont les preuves ne sont pas assumées avec un point de vue local (limites, continuité, dérivabilité). Selon Bloch (2002), « cette illustration des propriétés est supposée s'appuyer sur l'intuition graphique. Elle ne questionne pas le rapport graphique / fonctions supposé transparent : les élèves sont supposés voir dans le dessin graphique ce qu'y voit le professeur ». Après 2000, les représentations algébriques sont à nouveau minimisées et il y a une tentative de rééquilibrages entre les différents systèmes de représentations. Cependant, comme le notent Coppé et al. (2007), le registre algébrique reste prédominant pour l'étude des fonctions (de 30% à 58% des exercices selon un manuel de seconde mais beaucoup plus dans les manuels de première et de terminale scientifique).

Au niveau du baccalauréat, Coppé et al. (2007) notent de bonnes performances des élèves en ce qui concerne les conversions de registres de représentations. Mais il notent aussi qu'il existe toujours à ce niveau une forte algébrisation de techniques pour l'étude des fonctions, basées sur des règles de calcul (calculs de limites, de dérivées, étude des variations de fonctions polynômes, exponentielles, logarithmes…), qui renforcent les élèves dans des pratiques algébriques sur des objets somme toute assez formels. Le graphe d'une fonction n'est pas un outil de réflexion mais un objet de représentation globale complète, que l'on doit construire, compléter, confronter aux résultats algébriques. Les questions ponctuelles concernent surtout des intersections de graphes mais seules les procédures algébriques font foi. Les problèmes locaux (limites, continuité, dérivabilité) sont encapsulés dans des procédures et avec des règles algébriques. Le taux de variation d'une fonction peut-être explicitement demandé à des élèves de terminale mais l'idée de son calcul n'est pas supposée disponible spontanément quand elle est judicieuse. Donnons trois exemples de sujets au baccalauréat qui illustrent ces derniers points :

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + xe^{-x}\right).$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

PARTIE I

1. Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. Justifier que pour tout nombre réel positif x, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Métropole, baccalauréat juin 2009

EXERCICE 5 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de f est donnée sur le document annexe 2 que l'on complétera et que l'on rendra avec la copie.

Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe $\mathscr{C}$

1. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.
2. Pour tout x de l'intervalle $]-1\,;+\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$. Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$. Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f.
3. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

Métropole, baccalauréat juin 2007

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2e^{1-x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour $\mathscr{C}$ peut-on en tirer ?

b. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer sa fonction dérivée f'.

c. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe $\mathscr{C}$.

Métropole, baccalauréat juin 2006

Au final, Bloch, Comin, Coppé et al pointent comme nous, le fait qu'avec le travail algébrique dans le domaine A2, de façon assez isolée du travail dans le domaine A1, l'enseignement secondaire contribue à masquer les différences de points de vue ponctuel et global sur les fonctions et il évacue aussi le point de vue local dans ses programmes et ses pratiques. Autrement dit, il y aurait, avec le travail en A2, une large algébrisation, qui nuirait à l'accès au point de vue local et qui masquerait aussi pour certains élèves les points de vue ponctuel et global que l'on peut avoir sur les fonctions. Ces élèves, qui se retrouveraient majoritairement dans les populations étudiantes à l'université, ne pourraient pas facilement passer du ponctuel au global et vice versa. Hors des situations algébrisées, les fonctions seraient considérées, soit comme des processus ponctuels, soit comme des objets globaux, sans une articulation possible entre les deux points de vue. Dans les situations algébrisées, les objets manipulés seraient très formels, sans le relief sous jacent.

Concernant les registres de représentation, Artigue observe, de façon cohérente à l'idée développée ici, que les étudiants entrant à l'université ne tracent des graphes que quand la question leur est explicitement demandée et qu'ils ne pensent pas spontanément à utiliser cette représentation des fonctions pour raisonner. Ils ne savent pas, bien souvent, manipuler des fonctions qui ne sont pas données par leurs représentations algébriques. Ils ont des difficultés à convertir des informations d'un système de représentation à un autre, leurs pratiques à la fin du lycée semblant renforcer l'idée que les fonctions n'existent qu'à travers leur représentation algébrique. Hors, dans son travail, Maschietto (2001) met bien en évidence l'importance que peuvent avoir les représentations graphiques comme outils pour entrer dans des tâches d'analyse locale, leur disponibilité n'étant pas favorisée selon nous par les pratiques algébriques de la fin du lycée.

4) L'entrée dans l'analyse à l'université, un troisième domaine de travail à assumer

Le travail mené dans le cadre de la CI2U (Vandebrouck 2006) a confirmé les résultats précédents, à partir des 198 réponses d'étudiants de début de L1 à un questionnaire posé dans plusieurs universités française aux rentrées 2007 et 2008.

Les résultats à des calculs de limites étaient assez bons dès lors que ces limites mettaient en jeu des règles algébriques sur les fonctions monômes, exponentielles, logarithmes, avec des formes et des bornes usuelles : le calcul de la limite de $g(x) = x^{10}e^{x}$ lorsque x tend vers moins l'infini étant par exemple réussi à 55 %, le calcul lorsque x tend vers plus l'infini étant le mieux réussi avec 87 %. Les résultats étaient toujours corrects mais sensiblement moins bons lorsque les formes ne correspondaient pas à des formes indéterminées usuelles de terminale, c'est-à-dire que les règles algébriques ne s'appliquaient pas de façon immédiate : le calcul de la limite de $l(x) = \frac{\ln x - \ln 2}{x - 2}$ lorsque x tend vers plus l'infini étant par exemple réussi à 53 %, celui le moins bien réussi étant celui de la limite de $f(x) = \frac{e^{x}}{x^{3}}$ lorsque x tend vers 0, réussi à seulement 9 % - une vision formelle de l'écriture pouvant faire obstacle à la conceptualisation de limites différentes à gauche et à droite de 0.

En outre, les résultats de la CI2U ont remis en évidence la non disponibilité chez les étudiants du point de vue local nécessaire à un calcul correct des limites en formes de taux d'accroissement, la limite de $l(x) = \frac{\ln x - \ln 2}{x - 2}$ lorsque x tend vers 2 n'étant réussie qu'à 13%.

Concernant des calculs de limites non algébriques, seuls trois étudiants sur 198 ont répondu correctement aux deux calculs de limites **sin(2π*n*)** lorsque *n* tend vers l'infini et **cos(2π*x*)** lorsque *x* tend vers plus l'infini. Trois groupes d'étudiants sont alors apparus naturellement, selon qu'ils raisonnaient sur les deux limites (et d'autres) d'un point de vue ponctuel, donnant une limite finie à la suite et à la fonction, selon qu'ils raisonnaient avec un point de vue global sur les deux fonctions **sin** et **cos** (et d'autres), concluant que ni la suite ni la fonction n'avaient de limite à l'infini ou enfin selon qu'ils ne pouvaient raisonner ni dans un point de vue ni dans un autre. De fait, si la coordination des deux points de vue ponctuel et global se révélait nécessaire pour traiter au mieux tous les calculs de limites rencontrés, il est apparu que peu d'étudiants arrivant en L1 semblaient capables de changer de point de vue spontanément et que beaucoup d'étudiants ne mobilisaient aucun des deux points de vue, répondant faux ou ne répondant pas à toutes les questions où les procédures algébriques étaient inefficaces et où ces prises de points de vue étaient pertinentes.

Signalons enfin que dans le test de la CI2U, des résultats généraux mettaient bien en évidence la meilleure réussite au baccalauréat des étudiants semblant avoir pu raisonner avec un point de vue global. Considérant qu'il émerge à l'université un troisième domaine de travail A3, caractéristique des approximations, de l'analyse locale, non assumé dans le secondaire mais visé à l'université, et enseigné au moins dans les cours magistraux (avec le bagage de quantificateurs et de formalisations nécessaires), notre hypothèse serait qu'un manque de disponibilité de l'articulation entre les points de vue ponctuel et global, voir la non disponibilité du point de vue global ou ponctuel sur les fonctions, associé à une seule disponibilité du registre algébrique au détriment du registre graphique, fait obstacle à l'entrée dans le champ de l'analyse et notamment à la conceptualisation des notions locales sur les fonctions travaillées dès le début de l'université.

Nos résultats sont à mettre en regard de ceux de Balacheff et Gaudin (2002) qui dégagent dans leurs travaux sur les conceptions des étudiants deux types de conceptions chez des binômes d'élèves sortant du lycée : une conception courbe - algébrique (les élèves conceptualisent d'abord les fonctions comme des cas particuliers de courbes du plan, celles qui ont une forme algébrique spécifique) et une conception algébrique - graphique (une fonction est d'abord une formule algébrique, le graphe associé venant ensuite). Nous nous demandons à plus long terme s'il est possible d'étendre ces résultats et de définir des profils d'élèves à la sortie de la terminale scientifique et en première année d'université, reliés à certains niveaux de conceptualisation des notions de fonction, suite et limite, caractérisés par des points de vue et/ou des systèmes de représentations privilégiés pour le traitement des fonctions (algébrique ou graphique notamment), des aptitudes à les mobiliser et les utiliser de façon autonome spontanément (disponibilité), des aptitudes à convertir des informations d'un registre dans un autre, et enfin des aptitudes (ou non aptitudes) à dépasser les démarches algébriques et entrer dans des démarches locales pour des recherches de limite de suites ou de fonctions, des études de continuité ou de dérivabilité de fonctions.

Dans ses travaux sur la conceptualisation de la notion locale de limite, Robert (1982) met par exemple en évidence l'importance d'une préconception statique, bidimensionnelle, favorable à la conceptualisation de la notion locale de limite (en termes formels). Elle pointe également l'importance pour les étudiants de disposer de connaissances disponibles dans plusieurs cadres et registres (hypothèse des blocs) et non seulement dans un seul (qu'il soit algébrique ou graphique notamment). Nous nous demandons donc quelles sont les caractéristiques de ces profils d'élèves en terme de connaissances disponibles dans plusieurs blocs (numérique, graphique, algébrique, logique, symbolique, langage quantifié, entrée dans la preuve en général) ? Quelle serait alors les corrélations entre les domaines de travail identifiés dans le secondaire et les profils d'élèves ? Quels serait alors les profils des étudiants entrant à l'université ? Quelles tâches pourraient alors permettre, selon les profils, de favoriser une entrée dans la démarche locale ?

Afin d'avancer vers des réponses à ces questions, nous avons investigué dans deux directions dans le cadre du groupe Lycée-Université de l'IREM de Paris 7. Nous avons tout d'abord proposé à des élèves de terminale S et des étudiants de L1 un exercice similaire, caractéristique de la transition lycée – université. Il nous permet de définir quelques premières caractéristiques de profils, au sein de la population d'élèves susceptibles de poursuivre leurs études à l'université, et de retrouver ces caractéristiques parmi les copies étudiantes. Deuxièmement, nous avons élaboré un questionnaire plus systématique, bâtis à partir de nos analyses a priori, afin d'identifier de façon plus exhaustive les profils d'élèves et d'étudiants, dans leurs moindres caractéristiques et en lien avec des blocs de connaissances disponibles. Nous ne parlerons dans ce papier que du premier dispositif. Les résultats permettent d'esquisser les caractéristiques de deux profils d'élèves ou d'étudiants, selon la capacité à mobiliser un point de vue global sur les objets manipulés (disponibilité du point de vue global) ou bien la prégnance chez eux des seules procédures algébriques dans toutes les situations.

5) Une première investigation : un exercice d'intégration à la transition lycée - université

Certaines tâches mettant en jeu des intégrales sont présents dans les exercices de terminale et les épreuves de baccalauréat. Nous donnons trois sujets en exemple :

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx.$$

   a. Établir une relation entre I_{n+1} et I_n.
   b. Calculer I_1, puis I_2.
   c. Donner une interprétation graphique du nombre I_2. On la fera apparaître sur le graphique de la question 1 c.

3. a. Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante :

$$x^n \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant x^n e.$$

   b. En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

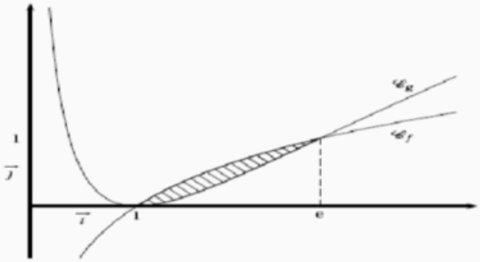
Métropole, juin 2006 (suite)

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = (\ln x)^2.$$



1. On cherche à déterminer l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.
   On note $I = \int_1^e \ln x \,\mathrm{d}x$ et $J = \int_1^e (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x$.
   a. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.
   b. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = e - 2I$.
   c. En déduire J.

Métropole, juin 2008

PARTIE II

Soit λ un nombre réel strictement positif. On pose $\mathcal{A}(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(x)\mathrm{d}x$. On se propose de majorer $\mathcal{A}(\lambda)$ à l'aide de deux méthodes différentes.

1. **Première méthode**
   a. Représenter, sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie), la partie du plan dont l'aire en unité d'aire, est égale à $\mathcal{A}(\lambda)$.
   b. Justifier que pour tout nombre réel λ strictement positif, $\mathcal{A}(\lambda) \leqslant \lambda \times f(1)$.
2. **Deuxième méthode**
   a. Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\int_0^{\lambda} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ en fonction de λ.
   b. On admet que pour tout nombre réel positif u, $\ln(1+u) \leqslant u$.
   Démontrer alors que, pour tout nombre réel λ strictement positif, $\mathcal{A}(\lambda) \leqslant -\lambda\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda} + 1$.
3. **Application numérique**
   Avec chacune des deux méthodes, trouver un majorant de $\mathcal{A}(5)$, arrondi au centième. Quelle méthode donne le meilleur majorant dans le cas où $\lambda = 5$?

Métropole, juin 2009 (suite)

On observe que le registre algébrique est très présent dans les sujets même s'il est moins prédominant dans le sujet 2009. En outre, il ne s'agit pas, sauf en 2009, d'intégrales fonctions de l'une de leurs bornes mais de valeurs d'intégrales. Dans le sujet de 2006, le cadre fonctionnel n'est donc pas du tout central ; dans celui de 2008, il est masqué par le registre algébrique. Enfin, dans le sujet de 2009, c'est uniquement le point de vue ponctuel qui est développé sur la quantité A : identification graphique de $A(\lambda)$ pour un λ fixé, majoration de $A(\lambda)$, approximations numériques de $A(\lambda)$. Le point de vue global sur l'objet A avec ses propriétés globales ne sont donc pas présents. Ce n'est même pas le point de vue ponctuel universel tel que nous l'avons introduit plus haut.

Notre dispositif a consisté à étudier les productions d'élèves de terminale S et d'étudiants de L1 sur un exercice dans le registre algébrique et traitant d'une fonction définie par une intégrale de la forme :

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt.$$

L'intérêt d'un tel type d'étude est que des procédures relevant uniquement du domaine A2 peuvent ne pas suffire pour dégager des propriétés de la fonction G, mêmes ponctuelles. Les énoncés précis ont été choisis par les professeurs de chacun des deux niveaux et de façon indépendante. Voici l'énoncé qui a été proposé en L1 :

Exercice 5

Il est possible pour cet exercice de traiter les questions dans le désordre

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt.$$

1) Montrer que si f est une fonction constante, la fonction G est également constante.
2) Montrer que si f est paire (respectivement impaire), la fonction G est paire (respectivement impaire).
3) Montrer que G est dérivable et calculer G'.
4) Expliciter la fonction G associée à la fonction $f(t) = |t|$.
5) On suppose que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = l$, démontrer que $\lim_{x\to+\infty} G(x) = l$

Enoncé de L1 (mars 2010)

Dans l'énoncé de L1, la fonction f est supposée continue sur R. Les étudiants doivent montrer des propriétés globales sur G notamment une propriété de parité de G (par changement de variable, connaissance spécifique de L1), ils doivent aussi justifier que G est dérivable et calculer G'. On peut penser que ces questions peuvent se traiter algébriquement mais les problèmes liés aux points de vue à adopter apparaissent en questions 2 comme nous le verrons plus bas ; c'est une difficulté du changement de variable sur les intégrales, qui est loin de n'être qu'une procédure algébrique. En question 4), les étudiants doivent traiter un exemple avec la fonction valeur absolue pour f et à cet endroit les seules procédures algébriques ne suffisent plus, bien que le registre des questions et des réponses attendues reste toujours algébrique. En effet, même en exploitant la parité de la valeur absolue et le résultat de la question 2), il est nécessaire d'envisager plusieurs cas selon que 0 appartient ou non à l'intervalle $[x\text{-}1,x\text{+}1]$; c'est-à-dire $x < -1$, x dans $[-1,1]$ et $x > 1$. La difficulté nous semble tenir en ce qu'il faut pouvoir adopter simultanément le point de vue ponctuel sur G en x et le point de vue global sur f dans l'intervalle $[x\text{-}1, x+1]$ pour dégager les cas de figure. La question 5) concerne quant à elle uniquement le domaine de travail A3 et nous ne développerons pas à son sujet.

Dans l'énoncé de terminale, la fonction f est d'amblée supposée dérivable, ce qui permet de rester dans le domaine de travail A2 pour de nombreuses questions : 1a), 1b), 1c), 2a), 3a) 1ère partie et enfin 3b).

I

THÈMES : Fonction définie par une intégrale

Dans le problème, $\mathscr{D}$ désignera l'ensemble des fonctions définies, dérivables sur R. À toute fonction f de $\mathscr{D}$, on associe la fonction $\tilde{f}$ telle que pour tout réel x : $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$.

1.a. Montrez que pour toute primitive F de f sur R ;

$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}[F(x+1) - F(x-1)]$.

b. Calculez $\tilde{f}$ lorsque f est la fonction définie par $f(t) = t^n$, n entier, $n \geqslant 1$.

Montrez que pour toute fonction polynôme f, $\tilde{f}$ est une fonction polynôme de même degré.

c. Calculez $\tilde{f}$ lorsque f est la fonction définie par $f(t) = \cos \pi t$.

2.a. Montrez que pour toute fonction f de $\mathscr{D}$, $\tilde{f}$ est aussi dérivable sur R et que pour tout x réel $(\tilde{f})'(x) = \frac{1}{2}[f(x+1) - f(x-1)]$.

b. Déduisez-en que les propositions (1) et (2) suivantes sont équivalentes : (1) $\tilde{f}$ est une fonction constante ; (2) f est périodique et 2 est une période.

3.a. On suppose f croissante sur R. Montrez qu'alors $\tilde{f}$ est croissante sur R et que pour tout réel x, $f(x-1) \leqslant \tilde{f}(x) \leqslant f(x+1)$.

b. f est la fonction définie sur R par $f(t) = \frac{4e^t}{t^2+4}$. Étudiez les variations de f sur R. Déduisez-en les variations de $\tilde{f}$ sur R.

Les premiers exemples de fonctions f permettent de sensibiliser les élèves à la dépendance de G (appelée f tilde dans l'énoncé) à f, ce qui n'est pas une préoccupation en L1, les étudiants devant raisonner directement dans le registre formel. On retrouve aussi des caractéristiques d'énoncés de terminale S par rapport à des énoncés de L1 concernant les types de tâches : la tâche de calcul de la dérivée de G est découpée en deux sous-tâches : question 1a) et question 2a) alors que les étudiants de L1 sont supposés trouver G' directement. Tout en restant dans le domaine de travail A2, la question 1b) partie 2 reste cependant difficile pour les lycéens, mais elle ne questionne pas les points de vue. Ce sont les questions 2b) et 3a) qui obligent ici à sortir du domaine de travail A2 et qui permettent de tester la capacité des élèves à manipuler des fonctions sous des points de vue ponctuel et global simultanément. Comme certaines des questions du partiel de L1, il s'agit toujours de questions dans le registre algébrique mais elles nécessitent de dépasser les démarches algébrisées.

Dans la question 2b), il faut jouer entre deux propriétés globales sur f et G - f est 2 périodique et G est constante - par l'intermédiaire d'une propriété ponctuelle universelle sur f - pour tout x réel, on a $f(x\text{-}1)=f(x+1)$. Plus précisément, dans le sens direct par exemple, il faut traduire de façon ponctuelle le fait que G est constante - pour tout x réel, on a $G'(x)=0$. Il faut ensuite réinterpréter l'information ponctuelle - pour tout x réel, on a $f(x\text{-}1)=f(x+1)$ – en périodicité de la fonction f. Dans la première partie de la question 3a), il faut jouer de la même façon entre deux propriétés globales sur f et G - f et G sont croissantes - par l'intermédiaire d'une propriété ponctuelle universelle sur f - pour tout x réel, on a $f(x-1) < f(x+1)$. Plus précisément, il faut à partir de la propriété globale - f est croissante – écrire la propriété ponctuelle universelle - pour tout x réel, on a $f(x-1) < f(x+1)$ – et réinterpréter la propriété ponctuelle universelle – $G'(x) > 0$ – en propriété globale – G croissante. Cependant la perte du caractère universel, dans les étapes intermédiaires de ces deux questions, n'est pas capitale et elle ne conduit pas nécessairement à l'échec des élèves comme nous allons le voir ci-dessous.

Dans la deuxième partie de la question 3a), il ne s'agit pas par contre de passer d'une propriété globale à une autre en les traduisant de façon ponctuelle. Comme dans l'exercice de L1, la difficulté semble tenir en ce qu'il faut pouvoir adopter simultanément le point de vue ponctuel sur G en x et le point de vue global sur f dans l'intervalle $[x-1, x+1]$. En effet, algébriquement, il faut traduire avec deux variables une propriété globale sur f - pour tout x réel et t dans l'intervalle [x-1,x+1], on a $f(x-1) < f(t) < f(x+1)$. Une autre méthode consiste à changer de registre et interpréter graphiquement la croissance de f et son intégrale sur un intervalle $[x-1,x+1]$. On comprend donc la complexité supplémentaire de cette question.

La question 3b) est quant à elle une simple application, les variations de f se déterminent algébriquement (calcul de dérivée, étude de signe).

Focalisés sur la transition lycée-université, nous avons choisi de n'analyser les copies que des cinq élèves désignés par leur enseignant comme susceptibles dans la classe de se retrouver à l'université l'année d'après. Les copies des étudiants ont par contre toutes été consultées sans pour autant une analyse de façon exhaustive.

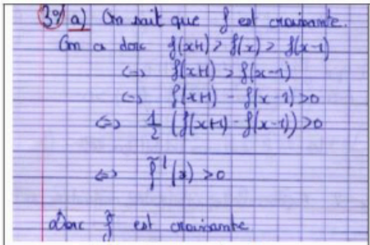
Conformément aux attentes, les difficultés majeures des étudiants et des lycéens se situent dans les questions nécessitant d'adopter des points de vue sur les fonctions et encore plus à jouer sur les points de vue ponctuel / ponctuel universel / global : les questions 2 et 4 pour les étudiants de L1 (on ne tient pas compte pour ce papier de la question 5) trop spécifique) et les questions 2b) et 3a) pour les lycéens. La vue synthétique sur les réponses des 5 lycéens sélectionnés aux questions de l'exercice est la suivante :

	Elève 1	Elève 2	Elève 3	Elève 4	Elève 5
1a)	OK	OK	OK	OK	OK
1b) partie 1	OK	OK	erreur	OK	OK
1b) partie 2	**essai**	**rien**	**essai**	**essai**	**rien**
1c)	OK sauf = 0	OK sauf = 0	OK sauf = 0	OK	OK
2a) dérivab.	faux	OK	rien	OK	OK
2a) calcul	OK	OK	OK	OK	OK
2b) direct	**par**	**rien**	**rien**	**par**	**par**
2b) indirect	**équivalence**	**rien**	**rien**	**équivalence**	**équivalence**
3a) justif.	**intégration d'inégalités ; équivalences**	**OK mais équivalences**	**OK**	**OK mais équivalences**	**OK mais équivalences**
3a) inégalité	**rien**	**rien**	**rien**	**erreur**	**OK**
3b) dérivée	OK	OK	OK	OK	OK
3b) conclus.	OK	OK	OK	OK	OK

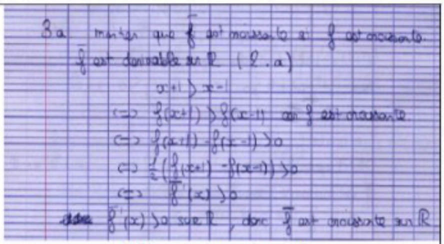
Sur les 5 élèves, aucun n'a pu réussir entièrement les questions 2b) et 3a) alors que la majorité des autres questions, qui ne questionnent pas directement les points de vue, sont traitées sans problème. Seule la question 1b), dont nous avons noté plus haut qu'elle est complexe pour les lycéens, est mal réussie majoritairement. La question 2b) est moins bien réussie que la première partie de la question 3a). Cela s'explique par le fait que l'interprétation globale de la propriété - pour tout x réel, on a $f(x\text{-}1)=f(x+1)$ – en périodicité nécessite plus la disponibilité du changement de point de vue ponctuel / global que l'interprétation – $G'(x) > 0$ – qui intervient dans la question 3a) et qui est plus certainement une compétence technique habituelle du domaine A2. Conformément à l'analyse qui en est faite plus haut, la deuxième partie de la question 3a) est la plus difficile et n'est abordée correctement que par l'élève 5. Il détourne cependant quelque peu la question puisqu'il y reconnaît une application immédiate de la formule de la moyenne. Il en est de même de l'élève 4 mais son application est erronée.

Nous précisons maintenant ces observations en détaillant les productions des 5 élèves.

Les élèves 2, 3 et 5 semblent raisonner sur des objets formels algébriques. La croissance de la fonction f, pour la question 3a), est traduite formellement par $f(x\text{-}1) < f(x+1)$. Il n'y a aucun quantificateur pour traduire cette propriété globale par une propriété ponctuelle universelle. Des équivalences sont utilisées pour des implications, ce qui traduit l'absence de sens donnée à ces connecteurs logiques : on peut penser que c'est un problème distinct de celui qui nous occupe ici, nous y revenons plus bas.

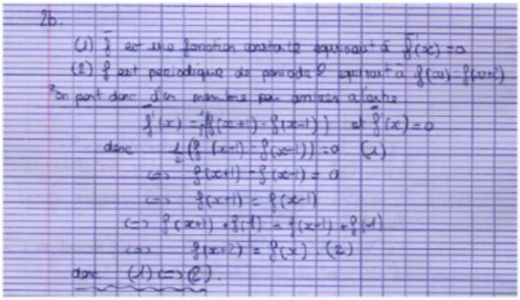


Elève 2 : question 3a)



Elève 5 : question 3a)

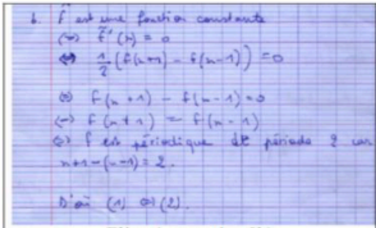
La production de l'élève 3 est sensiblement identique à celle de l'élève 2, sans quantificateur, mais il n'y a pas les symboles d'équivalence. Dans sa réponse à la question 2b), l'élève 5 confirme ses raisonnements formels. Il explicite « *on part d'un membre pour arriver à l'autre* ». Il n'y a toujours pas de quantification universelle pour traduire les propriétés globales et toujours des équivalences fausses. Il est nécessaire pour l'élève de revenir à la forme initiale de la périodicité $f(x)=f(x+2)$ pour conclure à la périodicité de f car l'obtention de $f(x\text{-}1)=f(x+1)$, même sans quantification, n'est pas pour lui une caractérisation de la périodicité. Du coup, ce sont les procédés algébriques qui font foi et tout semble bon pour faire apparaître $f(x)=f(x+2)$.


2b.
(1) f est une fonction constante équivaut à $f'(x)=0$
(2) f est périodique de période 2 équivaut à $f(x)=f(x+2)$
On part donc d'un membre pour arriver à l'autre
$f'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1))$ et $f'(x)=0$
donc $\frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)) = 0$ (1)
$\Leftrightarrow f(x+1) - f(x-1) = 0$
$\Leftrightarrow f(x+1) = f(x-1)$
$\Leftrightarrow f(x+1)+f(1) = f(x-1)+f(1)$
$\Leftrightarrow f(x+2) = f(x)$ (2)
donc (1) $\Leftrightarrow$ (2).

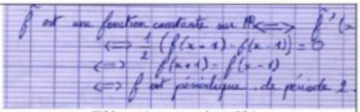
Elève 5 : question 2b)

Tout se passe comme si ces élèves ne travaillaient que dans le domaine A2, où seuls les calculs algébriques permettent de passer d'un état A traduisant des hypothèses à un état B caractéristique du résultat attendu. Le jeu ponctuel universel / global mis à l'œuvre dans ces deux questions est totalement masqué par des procédures algébriques sur des objets formels. Les quantifications permettant de mettre en scène ce jeu sont systématiquement absentes.

Le profil des élèves 1 et 4 semble par contre légèrement différent. Même si des caractéristiques de leurs productions sont similaires à celles des élèves précédents (présence massives des équivalences notamment, ce qui nous fait dire comme plus haut que ce problème logique, même s'il est lié, n'est pas au cœur de notre problématique – du moins c'est à creuser[4]), il semble que ces élèves sont capables d'interpréter ponctuellement ou globalement les écritures algébriques qu'ils manipulent. Dans la question 2b), ces élèves ne traduisent pas les propriétés globales avec des quantificateurs mais ils vont le faire en 3a) lorsque la quantification se révèle plus importante à leurs yeux. Ici on peut se demander si cette quantification n'est pas présente implicitement. Contrairement aux élèves du groupe précédent, les élèves peuvent interpréter directement l'écriture $f(x-1)=f(x+1)$ comme la 2-périodicité bien qu'aucun 2 n'y apparaisse.


1. f est une fonction constante
$\Leftrightarrow f'(x) = 0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)) = 0$
$\Leftrightarrow f(x+1) - f(x-1) = 0$
$\Leftrightarrow f(x+1) = f(x-1)$
$\Leftrightarrow$ f est périodique de période 2 car $x+1-(x-1) = 2$.
D'où (1) $\Leftrightarrow$ (2).

Elève 1 : question 2b)

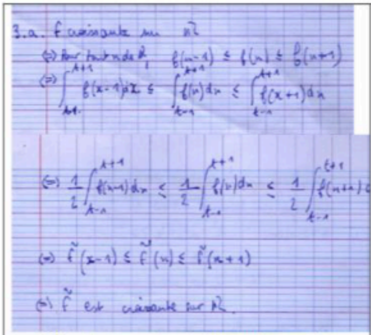

f est une fonction constante sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)) = 0$
$\Leftrightarrow f(x+1) = f(x-1)$
$\Leftrightarrow$ f est périodique de période 2.

Elève 4 : question 2b)

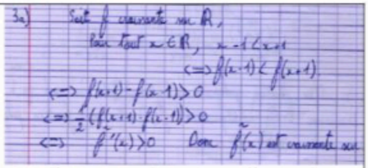
[4] On peut se demander si l'omniprésence du symbole d'équivalence ne montre pas l'amalgame que peuvent faire les élèves entre ici les équivalences du monde de l'analyse fonctionnelle et les égalités qui caractérisent le monde algébrique, mais ceci est plus prospectif

L'élève 1 explicite d'ailleurs le fait que « *f est périodique de période 2 car $x+1-(x-1)=2$* ». Autrement dit, ce n'est pas tant l'écriture qui est importante que le fait que pour tout x, $x+1-(x-1)=2$. Comme nous l'avons expliqué plus haut, il nous semble aussi qu'il faille mobiliser le point de vue global sur les fonctions pour passer directement de $f(x-1)=f(x+1)$ à la 2-périodicité, ce que n'ont pas pu faire les élèves du profil précédent.

Concernant la question 3a) (première partie), ces deux élèves mobilisent cette fois explicitement la quantification pour traduire ponctuellement les propriétés globales. Il n'y a donc pas un rabattement du relief ponctuel / global sur le formel lorsque la distinction est importante pour la question – il pouvait sembler moins capital d'expliciter la quantification dans la question 2b) comme nous l'avons signalé plus haut.


3.a. f croissante sur $\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow$ Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x-1) \leq f(x) \leq f(x+1)$
$\Leftrightarrow \int_{t-1}^{t+1} f(x-1)dx \leq \int_{t-1}^{t+1} f(x)dx \leq \int_{t-1}^{t+1} f(x+1)dx$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_{t-1}^{t+1} f(x-1)dx \leq \frac{1}{2}\int_{t-1}^{t+1} f(x)dx \leq \frac{1}{2}\int_{t-1}^{t+1} f(x+1)dx$
$\Leftrightarrow \tilde{f}(x-1) \leq \tilde{f}(x) \leq \tilde{f}(x+1)$
$\Leftrightarrow \tilde{f}$ est croissante sur $\mathbb{R}$

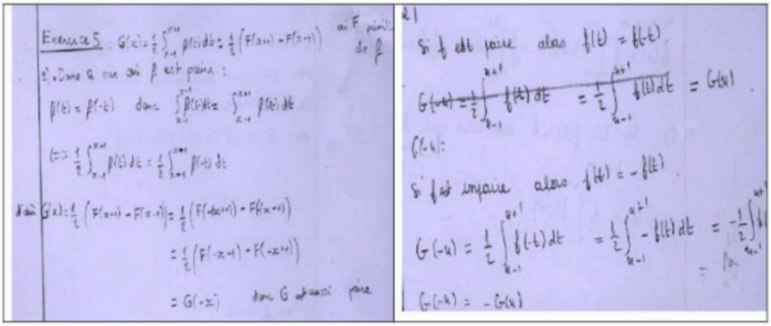
Elève 1 : question 3a) première partie


3a) Soit f croissante sur $\mathbb{R}$,
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x-1 < x+1$
$\Leftrightarrow f(x-1) < f(x+1)$
$\Leftrightarrow f(x+1) - f(x-1) > 0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)) > 0$
$\Leftrightarrow \tilde{f}'(x) > 0$ Donc $\tilde{f}(x)$ est croissante sur

Elève 4 : question 3a) première partie

Ces deux profils ayant été identifiés chez les élèves, nous avons essayer de retrouver des caractéristiques de ces profils chez les étudiants de L1. Ici, les difficultés liées aux changements de points de vue pertinents ou nécessaires pour résoudre les questions concernaient les questions 2) et 4).

Chez beaucoup d'étudiants on retrouve pour la question 2) cette absence de quantificateurs pour traduire les propriétés globales. Ceci entraine un amalgame entre les différents points de vue qui sont masqués par les procédures algébriques. Les écritures algébriques ne peuvent jamais être interprétées quand c'est nécessaire. Il s'en suit chez des étudiants une confusion entre les variables et une non distinction des rôles différents que chacune d'entre elle tient : ponctuel pour le x et global pour le t.



Exercice 5 : $G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt = \frac{1}{2}(F(x+1) - F(x-1))$ où F primitive de f

1) Dans le cas où f est paire :

$f(t) = f(-t)$ donc $\int_{x-1}^{x+1} f(-t)dt = \int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$

d'où $G(x) = \frac{1}{2}(F(x+1) - F(x-1)) = \frac{1}{2}(F(-(x+1)) - F(-(x-1)))$

$= \frac{1}{2}(F(-x-1) - F(-x+1))$

$= G(-x)$ donc G est aussi paire

2) Si f est paire alors $f(t) = f(-t)$.

$\cancel{G(-x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt} = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt = G(x)$.

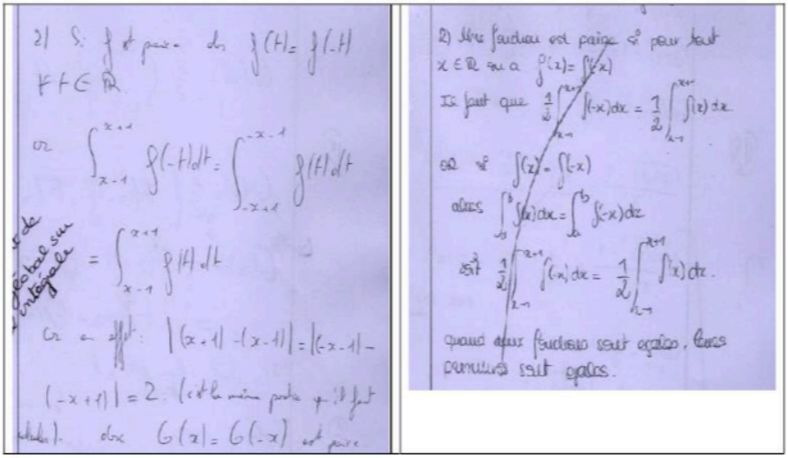
$G(-x)$:

Si f est impaire alors $f(t) = -f(-t)$.

$G(-x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(-t)dt = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} -f(t)dt = -\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f$

$G(-x) = -G(x)$

D'un autre côté, on trouve des copies où la prise en compte du point de vue global est mieux assumée, même implicitement, lorsqu'elle est pertinente. Les quantificateurs sont présents pour traduire les propriétés globales, en particulier ici lorsqu'il s'agit d'intégrer une relation d'égalité. Cela ne permet pas pour autant à ces étudiants de réussir les questions mais des arguments globaux sont mentionnés : « *c'est la même partie qu'il faut intégrer* » ou « *si deux fonctions sont égales, leurs primitives sont égales* »



2) Si f est paire donc $f(t) = f(-t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

or $\int_{x-1}^{x+1} f(-t)dt = \int_{-x+1}^{-x-1} f(t)dt$

$= \int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$

Car en effet : $|(x+1) - (x-1)| = |(-x-1) - (-x+1)| = 2$. (c'est la même partie qu'il faut intégrer). donc $G(x) = G(-x)$ est paire

de global sur intégrale

2) Une fonction est paire si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = f(-x)$

Il faut que $\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(-x)dx = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(x)dx$

or si $f(x) = f(-x)$

alors $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(-x)dx$

soit $\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(-x)dx = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(x)dx$.

quand deux fonctions sont égales, leurs primitives sont égales.

Concernant la question 4), on retrouve à nouveau cette distinction. Pour une partie des étudiants, les procédures mobilisées ne relève que du domaine de travail A2 comme dans la copie suivante.

4/ Explicitons la fonction G associée à la fonction $f(t) = |t|$

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} |t|\, dt$$

si $t<0$ alors

$$G(x) = -\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} t\, dt = -\frac{1}{2}[x+1-x+1] = -1$$

si $t>0$ alors

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} t\, dt = \frac{1}{2}[x+1-x+1] = 1.$$

4) Explicitons G seulement si $x-1>0$

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt \qquad f(t) = |t|$$

Si $x>0$

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} t\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{x-1}^{x+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{2}\right] = \frac{1}{4}[\ldots]$$

Si $x<0$

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} -t\,dt = -\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} t\,dt = -\frac{1}{4}\left((x+1)^2-(x-1)^2\right)$$

On trouve très peu de procédures correctes sur l'ensemble des questions mais une condition nécessaire est bien que l'étudiant fasse partie du deuxième groupe d'étudiants. Dans les deux copies précédentes, on voit bien combien, même en ayant pris conscience du fait qu'il faille considérer des cas, il est difficile de gérer simultanément le point de vue ponctuel sur G - calcul de $G(x)$ pour des valeurs de $x < 1$, x dans $[-1,1]$ ou $x > 1$ - et le point de vue global sur la valeur absolue – considération de $|t|$ pour t dans $[x-1,x+1]$ - ou pour dire autrement les deux variables en jeu, le domaine de variation de t étant défini par rapport à la première variable.

6) Conclusion

A l'issue de notre synthèse de résultats déjà mis en évidence dans de nombreux travaux, nous avons émis l'hypothèse que le registre algébrique des fonctions s'est constitué en cadre de travail chez les élèves de terminale scientifique, avec la manipulation d'objet très formels, et que ce cadre masque le relief que l'enseignement veut donner à la notion de fonction dans le domaine de travail A1. Les deux points de vue ponctuel et global sur les objets fonctions ne seraient pas suffisamment repérés par les élèves à l'issue de la classe de seconde et ne seraient plus suffisamment manipulés dans le domaine A2. Du coup, le manque de disponibilité de l'articulation entre les points de vue ponctuel et global, voir leur non disponibilité totale, associée à une seule disponibilité du registre algébrique au détriment du registre graphique, ferait obstacle à l'entrée des lycéens et des étudiants dans certains exercices d'analyse, où ces points de vue seraient pertinents (sans pour autant parler ici d'exercices d'analyse locale). Ces hypothèses semblent confirmées par les résultats à l'issue de notre exercice d'intégration proposé aux lycéens et étudiants. En cherchant à définir des profils d'élèves à l'issue de la terminale scientifique, parmi les populations d'élèves entrant à l'université, il nous semble que nous avons pu ici en esquisser deux.

Une première population d'élèves ou d'étudiants n'aurait plus aucune disponibilité du relief enseigné sur les fonctions dans le domaine de travail A1. Elle ne raisonnerait qu'algébriquement sans pouvoir se détacher des représentations algébriques. Les productions des élèves seraient mises en évidence par une absence totale des quantificateurs universels pour traduire des propriétés ponctuelles universelles, ce qui serait caractéristique d'une non disponibilité du point de vue global sur les fonctions. Cette population d'élèves ou d'étudiants seraient sûrement à mettre en relation avec la conception algébrique – graphique mise en évidence par Balacheff (2002). Elle se retrouverait sûrement aussi parmi les nombreux étudiants qui n'ont pu raisonner ni ponctuellement ni globalement dans les questions de limites non algébriques du questionnaire de la CI2U.

Une deuxième population d'élèves serait par contre capable d'adopter, dans certaines situations à mieux circonscrire, un point de vue global sur les objets manipulés. Ces élèves ou étudiants introduiraient spontanément des quantificateurs universels pour traduire qu'il est important que certaines propriétés utilisées sont ponctuelles universelles ou globales (quand on passe à l'intégrale notamment). Ces élèves seraient sûrement plus proches de la conception courbe algébrique de Balacheff. On peut également penser qu'il s'agirait des élèves dont

courbe algébrique de Balacheff. On peut également penser qu'il s'agirait des élèves dont
Robert (1982) met en évidence qu'ils disposent d'une préconception statique de la notion locale de limite, favorable à une conceptualisation correcte. On peut également rapprocher cela du fait que les étudiants du questionnaire de la CI2U qui avaient pu raisonner d'un point de vue global pour les calculs de limite étaient ceux qui statistiquement avaient obtenu une meilleure réussite au baccalauréat. Il reste toutefois à poursuivre le travail, à investiguer plus globalement toutes les questions que nous nous sommes posées plus haut, notamment par l'intermédiaire du questionnaire que nous faisons passer actuellement à des lycéens et des étudiants de L1.

ARTIGUE M. (1991) Analysis. Dans D. Tall (Eds.) *Advanced mathematical thinking* (pp.167-198). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

ARTIGUE M. (1993) Enseignement de l'analyse et fonctions de références. *Repère IREM*. Vol 11. pp 115-139.

ARTIGUE M., BATANERO C., KENT P. (2007) Mathematics thinking and learning at post-secondary level. Dans F. Lester (Eds.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.1011-1049). Greenwich, Connecticut: Information Age Publishing, Inc.

BALACHEFF N., GAUDIN N. (2002) *Students conceptions: an introduction to a formal characterization*. Cahier Leibniz, Numéro 65, Publication de Université Joseph Fourrier. http://halshs.archives-ouvertes.fr/hal-00190425_v1/

BLOCH I. (2000) *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université. Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*. Thèse de doctorat. Université de Bordeaux 1. Bordeaux.
BLOCH I. (2002) Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée. *Petit x*. Vol 58. pp 25-46.
BLOCH I. (2003) Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 52. pp 3-28.
BLOCH I. (2005) The teaching of calculus at the transition between upper secondary school and the university: factors of rupture. Communication to the Topic Study Group 12, Dans M. Niss (Eds.) *Actes de ICME10*. Copenhagen. Copenhagen: Roskilde University.
BRIDOUX S. (2005) *Analyse d'un enseignement de topologie en première année d'université*. Cahier de Didirem, Numéro 51, Publication de IREM Paris 7.
COMIN E. (2005) Variables et fonctions, du collège au lycée. Méprise didactique ou quiproquo inter institutionnel. *Petit x*. Vol 67. pp 33-61.
COPPE S., DORIER J.-L., YAVUZ I. (2007) De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement de la notion de fonction en France en seconde. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Vol 27 (2). pp 151-186.
DOUADY R. (1986) Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 7 (2). pp 5-31.
DUBINSKY E. (1991) Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. Dans D. Tall (Eds.) *Advanced mathematical thinking* (pp.95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Press.
DUVAL R. (1991) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. Vol 5. pp 37-65.
GUEUDET G. (2008) Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 67. pp 237-254.
MASCHIETTO M. (2001) Fonctionnalités des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse à l'université. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Vol 21 (1-2). pp 123-156.

PRASLON F. (2000) *Continuités et ruptures dans la transition Terminale S / DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement*. Thèse de Doctorat. Université Paris Diderot. Paris.
ROBERT A. (1982) *Divers travaux de mathématiques et l'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur*. Thèse d'Etat. Université Paris 7.
ROBERT A. (1998) Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 18 (2). pp 139-190.
ROBERT A. (2003) Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième: l'organisation des connaissances en niveaux de conceptualisation. *Petit x*. Vol 63. pp 7-29.
TALL D. (1996) Functions and calculus. Dans A. J. Bishop, et al. (Eds.) *International handbook of mathematics education* (pp.289-325). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
VANDEBROUCK F. (2006) Functions at the transition between French upper secondary school and University. Communication de la commission inter irem université (CI2U), Dans (Eds.) *Actes de ICMI*. Monterey, Mexico.
VERGNAUD G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 10 (2-3). pp 133-169.