Modelación y Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas a nivel Bachillerato: un ejemplo de Situación de Aprendizaje

José David Zaldívar Rojas, Noelia Londoño Millán & Gonzalo Medina Ramírez
Universidad Autónoma de Coahuila
México
david.zaldivar@uadec.edu.mx, noelialondono@uadec.edu.mx, gonzalov666@hotmail.com

Resumen. Paulatinamente, el uso de la tecnología, como paquetes de geometría dinámica, applets, calculadoras o sensores, se han convertido cada vez en algo más común dentro de las clases de matemáticas. Sin embargo, las resistencias sobre las posibilidades de integración de estos paquetes persisten. Esto es posiblemente debido a un desconocimiento de las potencialidades de la tecnología, el temor de los profesores a lo desconocido, el difícil control de grupo e inclusive a los pocos ejemplos de cómo realizar esta integración. Por esta razón, nuestro estudio propone ejemplos prácticos que muestran la integración de tecnología en una clase de matemáticas basada en modelación matemática. En las situaciones de aprendizaje se resalta la funcionalidad del conocimiento, el desarrollo de significados y argumentaciones, y las múltiples representaciones. Así mismo, se enfatiza el rol de la matemática como una herramienta para el desarrollo de diversos conceptos, donde la tecnología es un medio que sostiene el desarrollo del pensamiento matemático.

Palabras Clave: Modelación, Tecnología Escolar, Situaciones de aprendizaje, Bachillerato.

Abstract. Gradually, the use of technology, such as dynamic geometry packages, applets, calculators or sensors, had become something common in mathematic lessons. Nevertheless, there is still a resistance in the integration of those packages. Some possible causes are due to ignorance about technology potentialities, teachers caution of unknown, difficulty of classroom management, and also lack of real examples of integration. For that reason, our study proposes practical examples of technology integration in mathematical classes through mathematical modeling. The learning situations designed, emphasized knowledge functionality, meanings and argumentation developments, and multiple representations. Additionally, it is observed the role of mathematics as a tool to cope with concepts learning, where technology helped the development of mathematical thinking.

Keywords: Modelling, School Technology, Learning Activities, Middle School.

1. Introducción

Es innegable que la enseñanza de las matemáticas cada vez más se enfrenta al surgimiento de nuevas tecnologías con potencialidades para su integración en el aula de matemáticas, proporcionando sin duda transformaciones en la enseñanza y el aprendizaje (Villarreal, 2012), además de modificar la práctica docente alrededor del uso de tecnologías. Actualmente, una de tales transformaciones tiene que ver con la creación de ambientes de aprendizaje donde la matemática sea funcional y percibida también como una ciencia experimental, pero además, donde pueda promoverse diferentes representaciones de los conceptos matemáticos. El propósito que se persigue con el presente documento es evidenciar que a través de situaciones de aprendizaje diseñadas con base en la Modelación, es decir, en el *uso del conocimiento matemático*, es posible resignificar el conocimiento matemático integrando una componente tecnológica como una herramienta que permita tomar decisiones. De esta manera, se pretende impulsar entre los profesores una propuesta basada en elementos funcionales del conocimiento matemático que en ambientes de lápiz y papel difícilmente pudiesen vivenciar los estudiantes. Pero además, estas situaciones de aprendizaje se pretende que sirvan como ejemplos prácticos que el profesor de matemáticas pudiera considerar integrar a su práctica docente y motivar al diseño de diferentes tareas matemáticas basadas en la modelación y en la integración de tecnología escolar. La intención es proveer a los profesores de matemáticas de estrategias y de ejemplos plausibles a implementarse en el aula que promuevan y estimulen la discusión, la predicción, la argumentación y la explicación de los estudiantes, para afectar de manera benéfica la práctica docente. Además se pretende que el profesor tenga un rol más activo en la creación de situaciones, tareas y actividades desde una dimensión más centrada en lo funcional del conocimiento matemático y valore a la modelación como un medio para tal fin. Así mismo, se pretende discutir tecnologías novedosas como calculadoras graficadoras y su instrumentalización o algunas herramientas de geometría dinámica que permitan facilitar el aprendizaje matemático a través de procesos de modelación y reflexión colectiva.

En los siguientes apartados se discuten un par de ejemplos de situaciones de aprendizaje donde la modelación es la base epistemológica del diseño, y a través de la integración de una componente tecnológica se examinan elementos didácticos que pueden potenciarse con dicha integración para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Es importante mencionar que se pretende dejar ver la importancia de la fundamentación teórica y metodológica de dichas situaciones de aprendizaje y maneras en las cuales se pueden aprovechar para el desarrollo de diversos tópicos en el nivel bachillerato.

2. Tecnología y enseñanza de las matemáticas

En nuestros días, somos testigos de una importante “masificación” de las matemáticas como objeto de estudio dentro de las escuelas. Principalmente, esto responde a un movimiento para hacer de las matemáticas un conocimiento accesible para todos (Adler, Ball, Krainer, Lin y Novotna, 2005). Lo anterior deja ver la importancia que reviste la educación de las matemáticas en el desarrollo tecnológico y científico de un país y de las sociedades de nuestros tiempos (Alsina, et al., 2013), por lo que se le confiere a la educación la tarea de formar matemáticamente a los ciudadanos para que sean capaces de resolver problemáticas propias de sus realidades y de desarrollar un pensamiento matemático que sea *funcional* (Cordero, 2008). Aunado a lo anterior, en nuestros días la sociedad en general y la educación en particular, enfrentan el surgimiento de una era de importantes desarrollos tecnológicos que trae consigo el surgimiento de nuevas herramientas digitales, medios de comunicación y sobre todo de una cantidad importante de información al alcance de todos, lo cual se caracteriza actualmente como una Sociedad Digital (Trouche y Drijvers, 2010).

Ahora bien, dentro de la investigación en matemática educativa se ha puesto especial atención al uso de herramientas materiales, simbólicas e incluso digitales, que se involucran en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas (Artigue, 2004). De manera que también ha provocado repensar las cuestiones de *integración de entornos informáticos en la enseñanza de las matemáticas*, lo cual trae consigo interrogantes y desafíos; como por ejemplo, enfoques que atienden la *Génesis Instrumental*, donde se reflexiona en cómo los artefactos se convierten en instrumentos (Trouche y Drijvers, 2010; Artigue, 2004; Trouche, 2003) o las cuestiones que se derivan cuando se implementa un escenario tipo *laboratorio experimental* con tecnología (ver por ejemplo: Villarreal, 2012; Ramos, Briceño y Zaldívar, 2016)

Sin embargo, en la actualidad, la integración de la tecnología en el aula de matemáticas, aún no se realiza de una manera renovada o eficaz y a la par de las reflexiones dentro del campo de la investigación en matemática educativa que abogan cada vez más en *aprender con tecnología*, alejándose de posturas de un uso utilitario de dicha componente tecnológica. Al respecto, Hoyles (2012) menciona que *la concepción y la enseñanza de las matemáticas casi no se han visto modificadas, ni en particular la interpretación sobre qué significa ser matemáticamente competente* (p. 141). Según Villarreal (2012), las causas de lo anterior se podrían deber a un temor, por parte de los docentes, a lo desconocido, un temor a la pérdida de poder en el aula y al desconocimiento del uso de diversas tecnologías educativas así como alcances y posibilidades dentro del aula. De manera que ambientes de aprendizaje tradicionales basados en el uso de papel y lápiz son aún privilegiados. Por lo que se vuelve necesario y pertinente contar con escenarios donde la matemática aparezca de manera transversal y sea funcional, pero además, la tecnología no sirva sólo para representar la matemática de una manera dinámica, sino que permita a estudiantes y profesores la oportunidad de *aprender matemáticas con la tecnología.*

Nuestro interés es instaurar un escenario de aprendizaje para la educación matemática en el nivel medio superior de manera que se logre integrar la tecnología como una herramienta para la comprensión y el uso del conocimiento matemático en cursos escolarizados, sin la búsqueda de comparaciones con escenarios tradicionales, sino proveyendo de evidencia de una reorganización del pensamiento matemático en la actividad de los estudiantes y qué tipos de adecuaciones curriculares serían pertinentes. Pero para ello, se deben generar y aprovechar los resultados de investigación relativa al aprendizaje de las matemáticas cuando se integra a la tecnología en el aula y contando con un abordaje con tecnología como un recurso y elemento mediador que permita *pensar* matemáticamente.

Consideramos que la enseñanza debe encontrar los medios de reforzar, mediante la selección de situaciones adecuadas, el valor del uso del conocimiento y del carácter funcional de la matemática cuando se integran componentes tecnológicas para el aprendizaje de las matemáticas. Esto, sin embargo, abre vertientes y pone en el centro de la discusión, también a los maestros, de quienes se espera que puedan diseñar, preparar y experimentar con actividades que integren nuevas formas de trabajo y la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas. Sin duda que se tiene un área de oportunidad al respecto. No obstante, es necesario dimensionar la enorme dificultad asociada a la integración de la tecnología en el aula de matemáticas, no nada más considerando las complejidades de tipo técnicas o de infraestructura, sino poniendo énfasis en las de carácter cognitivo, didáctico y una fundamentación epistemológica de las propuestas que involucren tecnología, en el sentido de *resignificar* el conocimiento matemático (Cordero, 2011) que se construye en interacción con una componente tecnológica.

Al respecto de lo anterior, Torres y Suárez (2005) mencionan: *"una de las tendencias actuales, derivadas de la incorporación de la tecnología y de la investigación sobre ambientes de aprendizaje, señala que las estrategias para el mejoramiento de la educación se deben ocupar preferentemente del aprendizaje, de lo que logra el estudiante más de lo que hace el profesor… se trata de mejorar los espacios de aprendizaje escolarizados destacando la participación del* *profesor y, al mismo tiempo, brindar a los estudiantes la oportunidad de que se responsabilicen de su aprendizaje y logren cierto nivel de autonomía en sus necesidades de aprendizaje"* (p. 645).

3. Marco Conceptual: La Modelación Matemática en el aprendizaje de las matemáticas

La *Modelación Matemática y las Aplicaciones* dentro de la literatura especializada en matemática educativa se ha convertido en uno de los tópicos ampliamente discutido y propagado en los últimos años (Blum y Borromeo, 2009). Su importancia radica a la evidencia brindada en diversas investigaciones que hacían ver la poca vinculación que existe entre la escuela y su entorno (Lave, 1988), y a la imposibilidad de la transferencia del conocimiento aprendido en la escuela a la vida cotidiana de los estudiantes (Arrieta y Díaz, 2015), pero además, que muchos investigadores indican la necesidad de integrar a la modelación en la matemática escolar puesto que permite desarrollar en los estudiantes habilidades de pensamiento analítico, así como de resolución de problemas y sobre todo, porque permite una relación directa con el uso de tecnologías, las cuales realmente están implicadas en muchos ámbitos de nuestra era y en la sociedad (Kertil y Gurel, 2016; Niss, Blum y Galbraith, 2007). Inclusive en diversos libros de texto de diferentes niveles se aprecia una tendencia a integrar un "mundo extra-matemático" que enriquezca a las actividades y al currículo con la finalidad de hacer que las matemáticas sean útiles fuera del ámbito escolar. Sin embargo, y aunque la categoría de modelación matemática o modelización podría jugar un rol importante en las aulas de clases de muchos países e inclusive es considerada dentro de los planes curriculares como una manera de enseñar y aprender matemáticas, aún existe una brecha importante entre los ideales expresados en las reformas curriculares innovadoras y las prácticas escolares que sustancialmente se desarrollan día a día. Se afirma que es muy complejo encontrar actividades de modelación *genuinas* dentro del salón de clases de matemáticas (Niss, et al., 2007), debido a que, de manera general, la modelación es compleja tanto para los estudiantes, como para los maestros (Blum y Borromeo, 2009) por las demandas conceptuales y cognitivas que demanda.

La modelación matemática o modelización se ha considerado como una estrategia didáctica para el aprendizaje de las matemáticas (Cordero, 2006), es decir como un vehículo para enseñar matemáticas y también como un sinónimo de *aplicación* de un conocimiento matemático construido previamente, a un contexto de situaciones "reales" (Bosch, García, Gascón y Ruiz-Higueras, 2006). Dentro de la modelación matemática se incluyen procesos como matematizar, interpretar, verificar, revisar y generalizar situaciones de la vida cotidiana o de sistemas complejos (Lingefjard, 2002 citado en Kertil y Gurel, 2016).

De manera general, la postura de modelación, que permea en un importante número de investigaciones, se refiere a aquel *proceso* por medio del cual se pretende entablar una relación, a través de *modelos matemáticos*, entre un mundo extra-matemático y las matemáticas (Niss, et al, 2007), ver figura 1. Lo anterior implica que la modelación se considera como un proceso mediante el cual se pueden desarrollar competencias matemáticas para la aplicación de las mismas con propósitos extra-matemáticos (Niss, et al., 2007; García, Gascón, Higueras, Bosch, 2006), pero además, es el proceso mediante el cual se busca conjugar, por un lado a las matemáticas y, por el otro, la realidad (Biembengut y Hein, 1997).

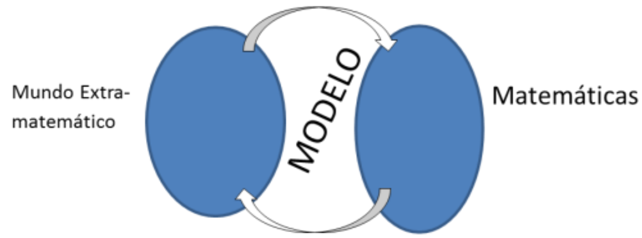


Figura 1. Matemáticas y el mundo extra-matemático (Basado en Niss et al, 2007, p.4).

Durante el proceso de modelación, al integrar dos grandes mundos, se espera que los estudiantes sean capaces de entender mejor la realidad que les rodea, se motiven para el estudio de las matemáticas, desarrollen otro tipo de competencias, tales como la lectura, la comunicación, el diseño y la aplicación de estrategias de resolución de problemas (Blum y Borromeo, 2009; Biembengut y Hein, 1997).

Dentro de la presente propuesta y de acuerdo a los objetivos que se plantearon al inicio, se considera al proceso de Modelación desde la postura propuesta por Blum y Leiß (2006) citado en Blum y Borromeo (2009), ver figura 2.

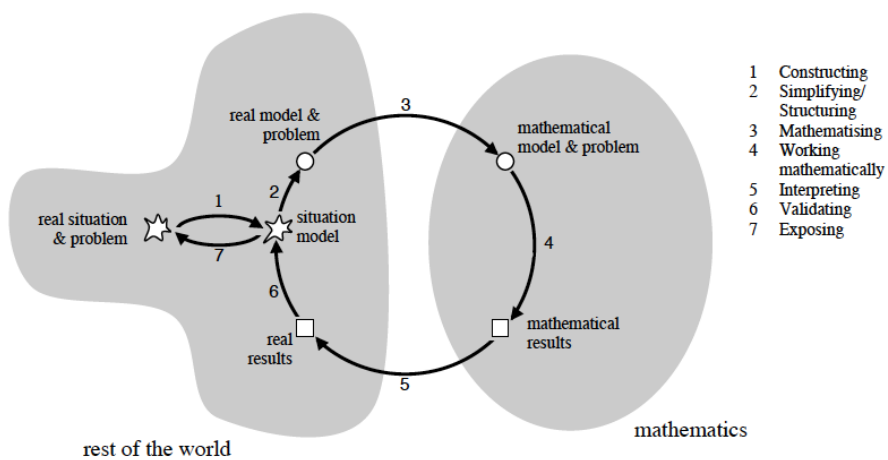


Figura 2. Ciclo de Modelación (Tomado de Blum y Borromeo, 2009).

En síntesis, el proceso de modelación mencionado anteriormente se inicia con la *conceptualización* de alguna Situación-Problema. Posteriormente, la situación se matematiza (conexiones 2 y 3 del ciclo de modelación, figura 2), esto quiere decir, simplificar, estructurar, precisar los datos y relaciones y establecer suposiciones de entrada en el dominio extra-matemático; en síntesis, la situación-problema se traduce a un lenguaje matemático. En esta *matematización* se utilizan métodos, teoremas y relaciones matemáticas conocidas, se resuelven las ecuaciones derivadas y se expresan como resultados matemáticos (conexión número 4: trabajar matemáticamente). Estos resultados son traducidos posteriormente al mundo extra-matemático con la finalidad de *interpretar* resultados, validar el modelo y evaluarlo con base en la matemática y la plausibilidad de los datos para dar solución al problema real (conexiones 5 y 6).

Las anteriores relaciones dentro del proceso de modelación asumido en el presente manuscrito son el sustento del diseño de la situación de aprendizaje que se propone más adelante a manera de ejemplo concreto basado en un proceso de modelación. Es decir, las situaciones de aprendizaje basadas en la modelación parten de establecer relaciones entre la matemática y un mundo extra-matemático, que podría establecerse en términos de un problema o de una situación real que involucre el *uso del conocimiento matemático para establecer una toma de decisión sobre un contexto particular*. Cabe mencionar que la integración de la tecnología será crucial y transversal a todo el proceso, y se espera que dicha integración permita el uso del conocimiento matemático y el establecimiento de diferentes registros de representación semiótica (verbal, tabular, gráfico y algebraico) a través de la resolución de una situación-problema vivencial que permita a los estudiantes hacer consideraciones sobre la realidad y evidenciar así la funcionalidad del conocimiento.

Las anteriores consideraciones y el hecho de involucrar el proceso de modelación en nuestra propuesta tienen que ver con la intención, como menciona Blum y Borromeo (2009), de desarrollar apropiados ambientes de aprendizaje que promuevan progresos más amplios y perdurables entre los estudiantes. Pero además, conlleva una transformación de las prácticas educativas y de las formas de conocer cuando se integra una componente de tecnología a la clase de matemáticas (Villarreal, 2012); es decir, la tecnología, como son ambientes de geometría dinámica o el uso de calculadoras graficadoras, se convierte en una herramienta útil que permite el desarrollo del pensamiento matemático, puesto que estimulan la reflexión y hacen más activos a los estudiantes, propiciando el diálogo entre estudiantes y profesor, de manera que se construyan significados de manera conjunta.

4. *¿Debo preocuparme?* Elementos de la situación de aprendizaje

La Situación de Aprendizaje (SA) que se decidió incluir en este documento responde al anterior proceso de modelación (figura 2), además de que integra una componente tecnológica que permita construir significados alrededor de los objetos matemáticos y que propicie el tratamiento y transformación de y entre diversos registros de representación semiótica (Hitt, 1998), a través del uso articulado e integrado de tablas de datos, gráficas y ecuaciones.

La SA que se denomina "¿Debo Preocuparme?, tiene por objetivo significar la noción de *razón de cambio* entre dos variables que corresponden a sendas escalas de temperatura: grados Fahrenheit y Centígrados; a través de establecer entre estas dos variables una relación funcional, la cual no es directamente proporcional. Dado el tema que se aborda, es viable ubicar a esta SA en el nivel Medio Superior en México (15-17 años). La secuencia de tareas que componen a la SA permite reflexionar entre los estudiantes el uso de fórmulas que en la asignatura de cursos de Física en Secundaria son vistas puramente desde la memorización y simple sustitución de valores concretos en las mismas, puesto que la reflexión sobre la razón de cambio; es decir, establecer la variación y cuantificarla, permite establecer dichas formulaciones. El interés de la integración tecnológica en la resolución de la situación se encuentra en que permite la visualización de los elementos a discutir en la situación, obligando a llevar el argumento de la respuesta más allá de un desarrollo algebraico y centrar la atención en el uso de la gráfica como un elemento integrador que permite argumentar sobre la situación planteada.

En el siguiente apartado se muestran la tarea de modelación que compone la SA y se complementa con comentarios sobre cada una con respecto al uso integrado de la tecnología, así como las etapas que del proceso de modelación se establecen en la tarea. Para el desarrollo de dicha SA, se utiliza el sistema de la calculadora *TI-Nspire* con posibilidades gráficas.

4.1. Planteamiento de la Situación Real

La tarea de modelación que se plantea para los estudiantes es la siguiente:

> *Desde hace un par de horas, Mauricio, un estudiante mexicano de intercambio en Estados Unidos, se ha empezado a sentir mal. Él recuerda que su madre le ha dicho que cuando la temperatura del cuerpo está por encima de los 39.5 ºC es momento de tomar medidas y acudir al médico de inmediato, ya que podría haber problemas derivadas de la fiebre. Un amigo suyo le ayuda a tomarse la temperatura con un termómetro. Al hacerlo, su amigo le comenta que tiene en ese momento 101.5 ºF.*
>
> *Mauricio sólo sabe que 0 grados centígrados equivale a 32 grados Fahrenheit y que 212 grados Fahrenheit son 100 grados centígrados. ¿Debería preocuparse Mauricio?*

4.2. Modelo de la Situación, modelo real y modelo matemático

Como se ha mencionado anteriormente, se busca que la resolución de las tareas asociadas a la SA permitan al estudiante el establecimiento de diversas *clases* de modelos, principalmente, dejar de considerar que el único *modelo de la situación* tenga que ser necesariamente algebraico. Es por ello, que la tecnología permitiría la construcción de diversos modelos: tabulares y geométricos. Pero además, la misma pregunta que se plantea no brinda de antemano un método o algoritmo de resolución, sino que plantea que el conocimiento matemático sea una herramienta que permita tomar una decisión.

Por otro lado, es posible que el estudiante ante la situación problemática planteada establezca una “regla de tres” para resolver lo solicitado. Esta estrategia no será útil porque la relación entre las variables, grados centígrados y grados Fahrenheit no es directamente proporcional. Por ejemplo, si el estudiante establece una relación proporcional entre las variables de la forma $\frac{0°C}{32°F}=\frac{x}{101.5°F}$, el valor de la cuarta proporcional será 0℃, a partir de lo cual el propio estudiante tendrá un momento de desconcierto. Probablemente intentará usar la otra relación entre las variables, posiblemente estableciendo que $\frac{100°C}{212°F}=\frac{x}{101.5°F}$, de lo cual resulta que el valor de la temperatura es de casi 50℃, lo cual acarrearía una reflexión conjunta con los estudiantes de qué respuesta será la correcta, dado que difieren enormemente, además de la imposibilidad del cuerpo humano a la resistencia a tan altas temperaturas sin daño cerebral o incluso la muerte.

Los modelos anteriores de solución, aunque permiten dar resultados matemáticos, al momento de interpretarlos como resultados reales, hacen que el proceso de modelación no pueda ser completado. Es decir, validar los resultados matemáticos con su relación con la realidad establecida en la situación problemática no pueden hacerse corresponder. De esta forma, el proceso de modelación exige que el estudiante se regrese al establecimiento de un modelo acorde a la situación, un modelo que integre estrategias de tipo variacional para analizar el cambio que ocurre en una de las variables cuando la otra cambia.

Al no encontrar en la “regla de tres” el *modelo de la situación*, los estudiantes deben construir otras herramientas y modelos matemáticos para resolver la situación. La pregunta que podría ayudarles a reflexionar sobre una estrategia distinta es cuestionarles sobre *cuánto cambia la temperatura por grado.* Es decir, si se eleva la temperatura un grado centígrado, cuánto varía la temperatura en grados Fahrenheit. Esto significa reflexionar sobre la variación por grado.

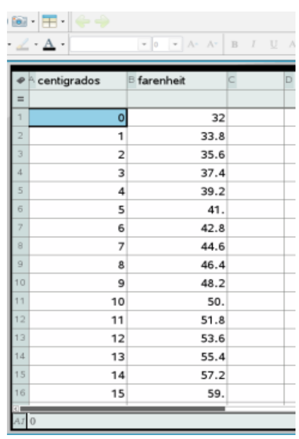
Con esta estrategia los estudiantes pueden obtener un modelo variacional de la relación a través de establecer una razón de cambio:

$$\frac{\Delta°\mathrm{F}}{\Delta°\mathrm{C}} = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5} = 1.8\ °\mathrm{F}/°\mathrm{C}$$

Esto significa que por cada nueve grados Fahrenheit hay un cambio de 5 grados centígrados; es decir, por cada grado centígrado que se eleve la temperatura, se eleva 1.8 grados Fahrenheit: 1.8 ^{o}F/^{o}C. Equivalentemente, se puede establecer que por cada 5 grados centígrados que varíe la temperatura se tendrá un cambio de 9 grados Fahrenheit. Posiblemente, las relaciones anteriores no sean tan sencillas de establecer por parte de los estudiantes, a lo que es posible promover un modelo gráfico entre las variables, considerando dentro del sistema cartesiano puntos de la forma $(°\mathrm{C}\,, °\mathrm{F})$ o $(°\mathrm{F}, °\mathrm{C})$ y ubicar los puntos $(0°\mathrm{C}\,, 32°\mathrm{F})$ y $(100°\mathrm{C}\,, 212°\mathrm{F})$, con lo cual se podrían establecer nexos con los temas de pendiente, función lineal y recta.

4.3. Uso de modelos matemáticos y de resultados matemáticos

A partir del establecimiento de una relación entre las variables, se puede solicitar a los estudiantes que completen una tabla de datos, y establezcan las variables que están involucradas en el problema y las relacionen. De esta manera se analizan cómo cambian los grados Fahrenheit con respecto al cambio en los grados centígrados. Es necesario para rellenar la tabla de datos tener en consideración la razón de cambio entre las variables: por cada grado que aumentan los grados centígrados hay un cambio de 1.8°F. En este momento del llenado de la tabla, es necesario reflexionar con los estudiantes sobre las condiciones iniciales de la situación, que en 0°C se corresponde a 32°F. Un modelo tabular que puede visualizarse con la TI-Nspire usando las funciones de *Listas y Hoja de Cálculo* sería como el siguiente (ver figura 3):



	centigrados	farenheit
1	0	32
2	1	33.8
3	2	35.6
4	3	37.4
5	4	39.2
6	5	41.
7	6	42.8
8	7	44.6
9	8	46.4
10	9	48.2
11	10	50.
12	11	51.8
13	12	53.6
14	13	55.4
15	14	57.2
16	15	59.

Figura 3. Modelo tabular de la relación entre grados Centígrados y Fahrenheit.

Ahora bien, gracias a la tecnología, es posible establecer las parejas de puntos y ubicarlas en el plano con la intención de construir un modelo geométrico de los datos y establecer un patrón de comportamiento visual. La relación que se establecerá entonces permitirá a los alumnos trabajar matemáticamente para avanzar quizás a un modelo algebraico de la relación, el cual, dado el patrón de los datos, será lineal. En el sistema TI-Nspire es posible utilizar una hoja de trabajo denominada "Datos y Estadísticos", dentro de la cual aparecen los datos de la tabla que los estudiantes construyeron anteriormente, ver figura 4.

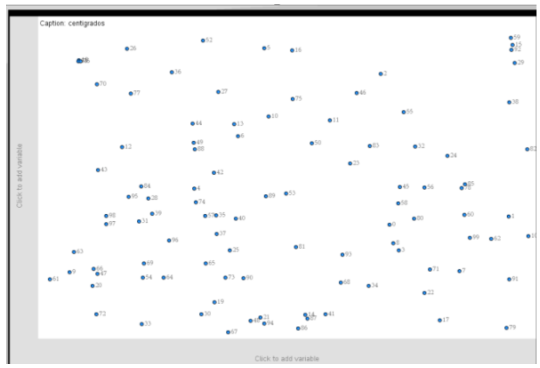


Figura 4. Datos en el plano.

La misma tecnología y su interfase permite establecer en los ejes las variables a relacionar. Previamente en el modelo tabular, cuando los estudiantes establecen las relaciones, declaran el nombre de las variables a usar, que podrían ser “Centígrados” y “Fahrenheit” para referirse a los grados Centígrados y Fahrenheit, respectivamente. De manera que en los recuadros donde se pide “agregar la variable” (ver figura 5) se insertan las variables que se consideraron en la tabla que ya se llenó. En el eje horizontal se agrega la variable “centígrados” y en el eje vertical, “Fahrenheit”. De esta manera se tiene que los grados Fahrenheit dependerán de la variable grados Centígrados. Sería muy interesante que en este momento el profesor pudiera cuestionar a los estudiantes sobre el por qué se eligió en dicho orden las variables y sobre qué implicaciones tendría considerarla de otra manera y qué cambios se podrían presentar. De esta forma dentro del proceso de modelación se está interpretando los resultados matemáticos.

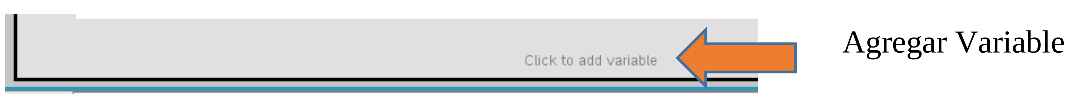


Figura 5. Estableciendo la relación entre las variables

Una vez que la relación se establezca y se declaren las variables en los ejes correspondientes, la tecnología permite visualizar el comportamiento del modelo gráfico de la relación (figura 6), en el cual se puede continuar trabajando matemáticamente utilizando la potencialidad de la tecnología y posiblemente estableciendo un modelo de regresión lineal para el conjunto de datos.

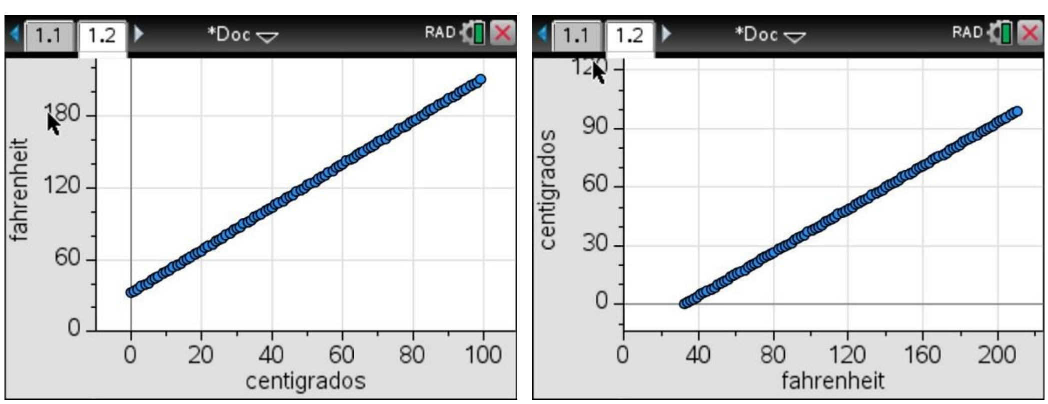


Figura 6. Estableciendo un modelo geométrico de la relación entre las variables.

Finalmente, y de acuerdo a las condiciones establecidas y al patrón hallado con ayuda de los modelos tabular y geométrico, es posible interpretar la pregunta que se hace desde el inicio en la tarea de modelación: ¿*Mauricio debe preocuparse*? Esto implica establecer el valor en grados centígrados de la temperatura de 101.5°F dadas en las condiciones de la situación real, de manera que en el proceso de modelación es necesario interpretar los resultados matemáticos.

4.4. Resultados reales y el regreso a la situación real

A partir de ambas gráficas se puede establecer un modelo algebraico de la relación. Incluso, a partir de la tabla que se construyó, el estudiante puede notar que la temperatura que permite contestar a la pregunta se encuentra entre dos valores: los correspondientes a 100.4°F y 102.2°F, que corresponden a 38℃ y 39℃, respectivamente. De esta manera, el modelo tabular permite al estudiante poder decidir sobre la situación. La relación algebraica como modelo que puede describir la situación y la relación entre variables será $℃ = \frac{5}{9}(°F - 32)$. A partir de dicha relación se puede establecer que Mauricio tiene una temperatura de 38.6℃, y de acuerdo a las recomendaciones de su madre, quizás no deba preocuparse, sin embargo, esta reflexión podría motivar a un debate entre los estudiantes, ya que al momento de *exponer los resultados* muchos podrían considerar que dicha temperatura ya es suficiente para tomar medidas de precaución, de forma que el proceso de modelación también permitiría desarrollar estrategias de comunicación y de debate con pares pero validadas a través de herramientas y argumentos matemáticos significativos para los estudiantes.

5. Comentarios finales

El ejemplo de tarea de modelación anteriormente mostrado intenta provocar en los profesores una reflexión sobre la importancia de la creación de ambientes de aprendizaje, situaciones y actividades que pudieran desarrollar en los estudiantes la competencia de modelación. Dicha competencia es deseable dentro del nivel medio superior, ya que se relaciona con la habilidad de los estudiantes para identificar preguntas relevantes, variables, relaciones y supuestos en una situación real dada, pero además, implica traducir aquello con un lenguaje matemático con la intención de construir, interpretar y validar la solución matemática con relación a la situación inicial planteada (Niss, et al., 2007). Sin embargo, el desarrollo de dicha competencia no es trivial, puesto que compromete consideraciones en torno no sólo a cómo enseñar matemáticas de manera efectiva, sino qué matemática enseñar y sobre la funcionalidad de la misma. Además, conlleva importantes retos para los profesores sobre decisiones relativas a tiempos de clase, planeaciones de actividades, diseño y elección de tareas, estrategias de evaluación y un balance entre la modelación como actividad en el aula y el desarrollo de otro tipo de trabajo matemático.

Tal y como hace ver Niss, et al, (2007), el proceso de modelación no es un proceso automático a implementarse en las aulas: “así como los estudiantes no son capaces de aplicar la matemática y construir modelos en automático sólo a partir de enfrentarse al estudio de las matemáticas teóricamente, así tampoco los profesores son capaces de orquestar ambientes, situaciones y actividades para la aplicación y modelación en automático, sólo por estar entrenados como matemáticos o como profesores de matemáticas de manera tradicional” (p. 7). Entonces se convierte en tema importante el de proveer a los profesores de matemáticas de más y mejores oportunidades para desarrollar dicha capacidad, ya sea en cursos de acompañamiento, o desarrollo profesional docente o durante la misma etapa de formación.

Por otro lado, la postura de modelación que se asume en el trabajo permitió desarrollar un tipo específico de tareas, las cuales buscaban que la matemática se convirtiera en una herramienta para la toma de decisiones, pero además, donde se reconociera a la tecnología educativa en su papel de mediadora que permitiera pensar y aprender con la tecnología (Villarreal, 2012), además de coordinar diferentes representaciones que apoyan a la discusión y comprensión de las ideas matemáticas a desarrollar.

Aunque parezca contradictorio y dado el rol que la tecnología ocupa en nuestros días y en la vida de las personas, aún se siguen ignorando las potencialidades de una componente tecnológica en las clases de matemáticas y se continúan privilegiando ambientes de aprendizaje de papel y lápiz. Es claro que dada la época en la cual vivimos se hace cada vez más necesario transformar los paradigmas educativos que aluden a un aprendizaje centrado en la algoritmia y repetición, por modelos de aprendizaje para la vida y donde la matemática sea un conocimiento funcional (Cordero, 2011). Pero lo anterior requerirá de que profesores en formación y en servicio conozcan y reconozcan las potencialidades de estos escenarios donde la tecnología y la modelación se conjugan para proveer al conocimiento matemático y su construcción de nuevas posibilidades. Esperamos que el ejemplo mostrado permita al profesor adentrarse al mundo "de riesgo" minado por la tecnología y acepte el reto de re direccionar sus prácticas tradicionales.

6. Referencias Bibliográficas

Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F. & Novotna, J. (2005). Reflection on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics, 60*(3): 359-381.

Alsina, C.; Burgués, C; Fortuny, J.; Giménez, J. y Torra, M. (2013). *Enseñar Matemáticas.* Barcelona: GRAÓ.

Arrieta, J. & Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(1): 19-48.

Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? *Educación Matemática, 16*(3): 5-28.

Biembengut, M. y Hein, N. (1997). Modelo, modelación y modelaje: métodos de enseñanza aprendizaje de matemáticas. *Épsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", 38:* 209-222.

Blum, W. y Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1(1)*: 45-58.

Bosch, M.; García, F.; Gascón, J. y Ruiz - Higueras, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática, 18(*2*)*: 37-74.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappesentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *La Matematica e la sua Didattica, 20*(1): 59-79.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del Cálculo Escolar. Una visión Socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Ed.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano*. México, D. F.: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C, 285-309.

Cordero, F. (2011) La modelación y la graficación en la matemática escolar. En Rodríguez-Salazar, M.; Quintero-Zazueta, R. y Hernández, R. (Coords.). *Razonamiento Matemático. Epistemología de la*

Imaginación. (Re) pensando el papel de la Epistemología en la Matemática Educativa. (pp. 377 - 399). Barcelona y México: Gedisa y Cinvestav.

García, F., Gascón, J., Ruiz-Higueras, L. y Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM,* 38(3): 226-246.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Educación Matemática, 10*(2): 23-45.

Hoyles, C. (2012). Retos y reflexiones en torno al potencial de la tecnología en la educación matemática. En Planas, N. (Coord.), *Teoría, Crítica y Práctica de la Educación Matemática.* Barcelona: GRAÓ, pp. 135-151.

Kertil, M. y Gurel, C. (2016). Mathematical modeling: a bridge to STEM education. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *4*(1): 44-55.

Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. (2007). Part 1. Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, H-W. Henn, M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education,* 3-32. New York: Springer.

Ramos, J., Briceño, E. C. y Zaldívar, J. (2016). Desarrollo del pensamiento y lenguaje Variacional en estudiantes de bachillerato con el uso de tecnología. *Revista Electrónica AMIUTEM*, 4(2): 16-32.

Torres, C. y Suárez, L. (2005). La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología. En Lezama, J., Sánchez, M. y Molina, J. (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18, 645-650. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Trouche, L. (2003). From artifact to instrument: mathematics teaching mediated by symbolic calculators. *Interacting with Computers, 15*(6): 783–800.

Trouche, L. y Drijvers, P. (2010). Handheld technology for mathematics education: flashback into the future. *ZDM Mathematics Education*, 42: 667-681.

Villarreal, M. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *VEsC, 3*(5): 73-94.