REGISTROS PARA UNA FUNCIÓN REAL CUALQUIERA DE VARIABLE REAL.

Miguel Delgado Pineda

miguel@mat.uned.es

Universidad Nacional de Educación a Distancia, UNED.

España

Autor de correspondencia: Miguel Delgado Pineda

Resumen.

En este trabajo se presenta una aproximación visual al concepto de función, introduciendo un par de registros de representación que sean válidos para cualquier función. Se clarifica, mediante imágenes, el concepto de función mostrando la dualidad del concepto, puesto que una función debe ser interpretada como un proceso y como un objeto. Se presenta un laboratorio de simulación matemática que permite construir objetos gráficos dinámicos que constituyen las imágenes necesarias para generar el proceso de visualización matemática.

Palabras clave: Función, Operaciones con funciones, Laboratorio matemático, Aplicación GeoGebra, Visualización matemática.

Abstrac.

In this work a visual approach to the concept of function is presented, introducing a pair of representation registers that are valid for any function. The concept of function is clarified through images, showing the duality of the concept, since a function must be interpreted as a process and as an object. A mathematical simulation laboratory is presented that allows the construction of dynamic graphic objects that constitute the images necessary to generate the mathematical visualization process.

Key words: Function, Operations with functions, Mathematical laboratory, GeoGebra application, Mathematical visualization.

Fecha de recepción: 05-03-2015
Fecha de aceptación:19-05-2015

1. Introducción.

En [14, p. 14] el autor hace referencia a un trabajo de Kleiner (1989) en el que se afirma "*que el concepto de función se remonta a más de 4000 años atrás, y que la noción de función no surgió en forma explícita hasta mediados del siglo XVIII…*"

Nosotros no presentamos un estudio que requiera remontarse al pasado remoto, si bien, tan sólo hacemos referencia a varios libros que son usados en los primeros cursos universitarios desde hace unos 20 años. Contrastar los contenidos, relativos al concepto de función, de estos libros nos permite establecer las condiciones iniciales para abordar nuestro trabajo.

En [31, p. 13] se establece la definición de función como sigue: "*Una función de X a Y es una regla (o método) para asignar un (y sólo un) elemento de Y a cada elemento de X*" donde se aclara que "*por lo general, X e Y son conjuntos de números.*"

En [1, p. 29] se presenta la definición de función de la siguiente forma: "*Una función f de un conjunto D en un conjunto S es una regla que asigna un único elemento f(x) de S a cada uno de los elementos x de D.*"

En [32, p. 12] está señalada la definición de función como: "*Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado f(x), de un conjunto B*" y también hace referencias "*…consideramos funciones para los cuales los conjuntos A y B son conjuntos de números reales.*"

En [25, p. 25] se establece la definición de función diciendo: "*Sean X e Y dos conjuntos de números reales. Una función real f de una variable real x de X a Y es una correspondencia que asigna a cada número x de X exactamente un número y de Y.*"

Además, incluimos otro libro [12, p. 51], del autor de este trabajo, en el que se indica: "*Una relación entre los conjuntos A y B se denomina aplicación, o función, entre A y B si y sólo si cualquier elemento del conjunto inicial A está relacionado con un único elemento del conjunto final B*".

En [6, p. 42] se define el concepto de función como: "*Una función F es un conjunto de pares ordenados (x, y) ninguno de los cuales tienen el mismo primer elemento. Esto es, si (x, y) pertenece a F y (x, z) pertenece a F, entonces y=z.*"

De estos libros indicados, y algunos similares, existen múltiples ediciones y han sido utilizados en la formación inicial del universitario. En estos libros se complementa la definición de función con ejemplos y numerosas características de las funciones.

Desde cierto punto de vista resulta que lo aportado en esta muestra sobre la definición de función, hace meditar sobre la afirmación: "*Las razones por las cuales los estudiantes tienen dificultades con el concepto parecen centrarse en su complejidad y generalidad.*" contenida en [14, p. 13]. Es claro que tal afirmación no está referida a esta muestra. Además, en [14, p. 13] se añade "*Ya que presenta muchas facetas y contiene una multiplicidad de representaciones…*"

Si bien se han relatado distintas formas de expresar el concepto de función, sucede que algunos textos presentan ejemplos previos que expresan una relación funcional entre dos magnitudes distintas. Concretamente, se relaciona la medida del área de una figura en relación a una medida de longitud de un segmento. En el caso de [31] es el área de un cuadrado respecto a la longitud del lado, $A = x^2$, mientras que en [1], [32] y [25] es el área de un circulo en función de con la longitud de su radio, $A = \pi x^2$. Sin embargo, en [12] y [6] el concepto de función (aplicación) viene precedido por el de relación (correspondencia) entre conjuntos.

Nos hacemos eco de las palabras sobre función anteriormente indicadas y contenidas en [14] por un lado, y, por otro, abordamos la necesidad de destacar las representaciones del concepto de función desde una perspectiva educativa.

2. Comprensión y Visualización Matemática

En Educación Matemática, o Didáctica Matemática, hacer referencia a la comprensión de la Matemática carece de sentido si no se hace referencia al sistema de signos que se emplean en esta materia, véase [18], o no se muestran las representaciones de los objetos matemáticos, véase [16]. Así pues, cuando un docente trata de enseñar el concepto de función debe clarificar a sus estudiantes el conjunto de signos, la sintaxis empleada con esos signos y la semántica relativa a dicha sintaxis. Ahora bien, hacerlo desde una perspectiva de lenguaje formal, sin hacer uso de algún tipo de representación visual, podría acarrear en la necesidad de un sobreesfuerzo del discente para lograr adquirir el conocimiento.

Entendemos que, en el proceso de aprendizaje de un estudiante, la comprensión de un objeto matemático es un producto tras un proceso mediado por las concepciones iniciales del estudiante. De estas destacamos cuatro componentes principales:

- Las creencias personales sobre los objetos de las Matemáticas. Un ejemplo sobre estas creencias relacionado con el concepto de función real de variable real. Cuando el profesor habla del valor de la función para un número cualquiera y el estudiante piensa en un número natural. No hace falta citar algún trabajo sobre este hecho, puesto que el lector puede experimentarlo directamente. Basta solicitar al estudiante un número cualquiera, y reiterar la solicitud hasta obtener un número no entero.

- La creencia personal sobre el método matemático. Un ejemplo sobre esto relativo a las suma de funciones. Dadas las expresiones simbólicas de dos funciones $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = 2x + 3$, la función $f + g$ no emerge como operación funcional si no que queda relegada a una suma de polinomios $(3x + 2) + (2x + 3) = 5x + 5$. En cierta medida parece que no se admiten otros significados a la palabra "sumar" cuando se trata de expresiones simbólicas, pues se considera que es algo "fijo".

- Los conocimientos de los contenidos matemáticos previos. En el ejemplo anterior queda patente que si el estudiante no supiera sumar polinomios, sumar funciones podría carecer de significado.

- La capacidad de adaptación pedagógica que muestre de forma contrastada. Un nuevo ejemplo observable sobre funciones: Se solicita al estudiante representar la gráfica de una función afín ($f(x) = 3x + 2$) una vez que ya está establecido que se trata de una recta. La existencia o no de tabla de valores con más de dos puntos muestra si el estudiante asocia gráfica de función afín con una recta o lo asocia a un proceso final después de calcular varios puntos de la gráfica.

Al hablar de las concepciones de un estudiante, nos referimos a esas concepciones producto de estudios anteriores y aprendizajes previos en gran medida.

Entendemos que el proceso de enseñanza de un profesor está igualmente mediado por sus propias concepciones. Éstas presentan las mismas componentes: Las creencias personales sobre la Matemática, la creencia personal sobre el método matemático, los conocimientos de los contenidos matemáticos, y la capacidad de adaptación pedagógica.

Hay quienes consideran que el proceso de visualización matemática consiste en crear una representación visible de algo, ya sea un concepto, idea, conjunto de datos, u de otro tipo. Piensan que este proceso permite ver lo que es imposible de ver y reconocer patrones. Entendemos que esta descripción se corresponde con el proceso de la llamada visualización científica, con la cual se pueden ver las estructuras corporales sin invadir el cuerpo de un paciente, o representar imágenes tridimensionales y en color de planetas y satélites del sistema solar.

Ante la pregunta: ¿Qué es visualizar en Matemática? Debemos indicar que hay múltiples interpretaciones en la literatura de Educación Matemática. Aquí incorporamos un somero comentario sobre lo que entienden algunos autores. Visualizar es:

- *Ver con la vista.* (Zimmermann 1991, Davis 1993)

- *Entrever a través de los diagramas*. (Dörfler 2004, Arcavi 2005). Véase Dörfler y su Pensamiento Diagramático.

- *Comunicar de un vistazo; vislumbrar demostraciones sin palabras*. (Arcavi 2003, Alsina 2006)

- *Conectar representaciones y lenguajes*. Véase Hillel y su Modos de descripción y lenguajes.

- *Intuir* (Fischbein 1987) y *pensar geométricamente*. (Gueudet 2002 Intuición geométrica)

- *Visibilizar: Concretar con ejemplos* (Bill 2006, Presmeg 1997) y *transportar conocimientos a través de metáforas*. (Presmeg 2008, Steinbiring 2005)

- *Imaginar en la mente* (Presmeg 2006), *construir un concepto imagen rico*. (Tall y Vinner 1981)

- *Pensar geométricamente* (Zimmermann 1991, Davis 1993, Guzman 1996) y *una herramienta para resolver problemas.* Véase Sierpinska y sus Modos de Pensamiento.

- *Aprender a conectar marcos y puntos de vista, y construir una imagen mental rica*. Véanse Marcos y puntos de vista en Alves Dias.

- *Aprender y conectar representaciones*. (Duval 2006, Hitt 2002)

Visto el listado anterior, afirmamos que la visualización matemática es un tema de gran interés educativo, y que nosotros tenemos otra concepción de visualizar matemáticamente un objeto matemático. Para presentar nuestro punto de vista necesitamos hacer constar algunas cuestiones de importantes desde la perspectiva de la Inteligencia Visual, véase [24].

Una batería de experimentos viene a concluir de forma estadística, que el cerebro archiva de forma autónoma muchas imágenes por analogías con otras almacenadas. Un ejemplo que clarifica esto lo representa la imagen de la figura 1,

Figura 1: Imagen que el cerebro interpreta como un martillo.

en la cual pueden ser observados un martillo y unos clavos. Estos objetos no son objetos planos como la imagen. Aunque fuesen planos, no se aprecian figuras claras, puesto que la imagen se construye con vaciados de color, en lugar de mostrar el objeto plano en sí. Sin embargo, la fotografía de la figura 2 es un elemento plano y nos muestra un martillo con una combinación de luces y sombras mediante las cuales el cerebro entiende que es la imagen de un martillo.

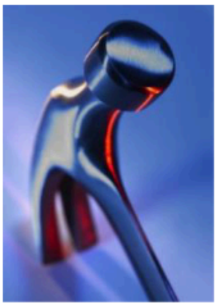

Figura 2: Fotografía de un martillo.

La dificultad de ver alguna representación de cuestiones matemáticas depende de las imágenes de asociación que nuestro cerebro usa. Una representación gráfica matemática no asegura comprensión de algo concreto. Por ejemplo, la representación usual del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es la denominada recta real. La representación del conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es similar a la anterior, como una recta pues $\mathbb{Q}$ es un conjunto denso en $\mathbb{R}$. Ahora bien, en la recta racional existe un orden dividido, es decir, que cada dos racionales distintos hay otro racional entre ellos, por ello, lo representamos como una recta. Este orden no nos permite observar los huecos que hay en esa recta racional y huecos que corresponden a números irracionales.

La estructura acumulativa y relacional, que tiene el conocimiento académico matemático, permite al docente comprobar, que el desconocimiento o la adquisición inadecuada de un concepto, o de un resultado matemático, del estudiante genera cono de sombra matemática que le impide al estudiante, o dificulta, la comprensión de muchos otros conceptos y resultados. Entendemos que se hace necesario que el docente se formule la pregunta: ¿Por qué intento explicar un concepto o un teorema a un estudiante?

La respuesta inmediata es obvia, basta remarcar la labor social del docente de Matemáticas. A esta respuesta, añadimos otra de carácter personal: el placer intelectual que se siente cuando se comprueba que el discente se acerca sucesivamente al proceso de comprensión. Observar al estudiante como se desenvuelve en la zona oscura del cono de sombras y se acerca a una generatriz, motiva las acciones didácticas del profesor. Comprobar el salto cualitativo que realiza para adquirir el saber correspondiente al objeto matemático genera una revaloración automática de su labor docente. Aunque, esto no depende del docente, le genera una sensación placentera.

Ya sea por razones de índole social o de índole personal, constantemente, el docente se pregunta: ¿Cómo hacer que un estudiante se transforme en un observador aventajado de Matemáticas y las comprenda? A esta pregunta contestamos de manera rotunda: Presentando los conceptos matemáticos de forma activa para el estudiante y haciendo una actuación directa sobre sus sentidos. Destacamos las actuaciones que prioricen acciones relativas al sentido de la vista. Es decir, hacer que los elementos matemáticos puedan verse con los ojos antes de ser entendidos.

Desde la perspectiva de la Inteligencia Visual se postula que el cerebro está capacitado para almacenar eficazmente información visual de forma autónoma. Además, se presupone que más del 50% de las neuronas activas del cerebro humano están dedicadas a tareas relacionadas con la vista.

Es necesario que el lector realice un pequeño experimento para situarle en el punto de partida de nuestra concepción de la Visualización Matemática.

Imagínese que alguien le solicita que le hable acerca del animal denominado "vaca". Muy probablemente su cerebro le ha presentado la imagen, foto o dibujo de una vaca concreta. Resulta que con esa primera imagen mental, usted inicia su discurso sin ninguna dificultad. Seguramente, este proceso cerebral de mostrarle la imagen mental no se hubiera producido si el animal elegido es el "pangolín". Si es así, probablemente, su cerebro no tenga almacenado imagen alguna de un pangolín.

Basta una indicación; un pangolín de una especie de pequeño armadillo africano, para que usted inicie su discurso gracias a la capacidad de relacionar conocimientos de los mamíferos y de los armadillos.

Mostramos una situación educativa en matemáticas donde se aprecie una similitud con el proceso que se experimenta con el pangolín. Quizás un nuevo estudiante experimente la misma sensación cuando se le habla de polinomios. Para paliar esa sensación se realiza una asociación adecuada de ideas y objetos matemáticos. El objeto matemático más cercano al polinomio $3x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ es el número tres mil doscientos veinte y uno, puesto que la expresión "3221" no es más que una forma reducida del número $3(10)^3 + 2(10)^2 + 2(10)^1 + 1$, y tiene mucho sentido intentar sumar polinomios resaltando las analogías con la suma de números.

Una vez establecidas las similitudes, pangolín con armadillo, polinomio con número y suma de polinomios con suma de números, entendemos que se produzca la asociación entre sumas de funciones polinómicas y suma de polinomios. El problema es que los ejemplos de la vaca o del pangolín no son los adecuados para el concepto de función. La diferencia es bastante clara, las vacas y los pangolines no requieren del ser humano para ratificar su existencia.

Nuevamente, el lector puede experimentar una situación que nos permita acercarnos a la naturaleza matemática del concepto de función. Imagínese que alguien le solicita que le hable acerca del objeto "mesa". Muy probablemente su cerebro le presenta la imagen, foto o dibujo de una mesa de comedor o una de cuatro patas. Al iniciar su discurso debe indicar al oyente que este objeto queda definido por la utilidad que el hombre hace del objeto. Es decir, la simple existencia del objeto mesa carece de sentido sin no está acompañada de su utilidad y su funcionalidad. Una simple piedra plana pudiera constituirse en mesa en una excursión por el campo.

Ante la observación realizada sobre "mesa", hacemos referencia a lo presentado sobre función en [9, p. 115] donde se afirma: "*El estudio de funciones genera problemáticas novedosas con respecto al álgebra… Rupturas* *con el álgebra se notan en el hecho de que una función aparece a la vez como proceso y concepto…"*

Nos preguntamos si esto no ocurre de igual forma con algunos conceptos matemáticos concretos. Si intentamos hablar de la función seno. ¿No se nos presenta el recuerdo de una línea continua sinusoidal? Y si hablamos de la función tangente. ¿Recordamos una línea discontinua con "muchas" asíntotas verticales? Suponemos que el lector entiende que la respuesta es afirmativa, y que su cerebro selecciona las imágenes adecuadas aunque, desde un punto de vista pictográfico, un poco imprecisas.

Si bien podemos asumir que al hablar de una función afín, una función cuadrática, la función logaritmo, la función exponencial y las funciones trigonométricas directas se produce una imagen adecuada, nos preguntamos: ¿Qué imagen se presenta cuando hablamos de función cualquiera? En general el cerebro no nos aporta imagen alguna por falta de analogía, aunque la respuesta se reconstruye al describir la imagen como una línea en el plano cartesiano. Eso sí, una línea con una forma muy específica y no una línea cualquiera. En esencia, no es más que la representación genérica de la definición de una función como es mostrada en [6]

Para afrontar el reto de presentar una función cualquiera, hacemos referencia a otros párrafos de [9, pp. 115-116]: "*Las funciones se presentan mediante cuatro registros generales: El registro verbal… El registro simbólico… El registro tabular… El registro gráfico…*" Pudiera parecer que este tipo de registros aportan un acercamiento a la idea de una función cualquiera más que las definiciones del inicio de este trabajo. Ahora bien, esto no es así, necesariamente.

El registro verbal; una función cualquiera. El registro simbólico; una regla entre variables como en [31] y [32]. El registro tabular; no existe. El registro gráfico; un conjuntos de puntos como en [6].

¿Qué imagen nos aporta el cerebro cuándo se habla de la suma, el producto y la composición de funciones? Tampoco parece que los registros de representación anteriores permitan ofrecer alguna imagen clara que pueda presentar el profesor para facilitar el aprendizaje del estudiante.

3. Visualizar el concepto de función

Al tratar los procesos educativos es frecuente algunas expresiones de la forma: "…para un número cualquiera…". Aunque no se note, esas expresiones conllevan un enorme cambio conceptual, puesto que se transpone el concepto de variable numérica. Además, hace necesario un cambio de registros de representación de esos "números cualesquiera".

El estudio del concepto de función está enmarcado en el territorio del Cálculo Matemático, y los números de referencia son los números reales. Se puede decir que esos son los números que, al estudiante y al profesor, menos les apetece utilizar en las cuestiones prácticas y ejemplos. Además, se debe resaltar qué se entiende por trabajar con números reales. Por simplificar, entenderemos trabajar con números reales efectuar las operaciones definidas en este conjunto numérico y describir de forma precisa los subconjuntos del conjunto de los números reales. Puede parecer que trabajar con números reales es, esencialmente, una cuestión algebraica, si no fuera por la naturaleza de esos números. Piénsese que cualquier estudiante sobreentiende al número 5 como el resultado de la operación suma de los números 2 y 3. Ahora bien, no siempre asume al número $1 + \sqrt{2}$ como el resultado de sumar los números 1 y $\sqrt{2}$, pues no suele distinguir entre operación y representación de algunos números irracionales. Tampoco entiende la necesidad de escribir $\frac{\sqrt{2}}{2}$ el resultado de dividir 1 entre $\sqrt{2}$. Estas cuestiones están, intrínsecamente, unidas a alguna de las construcciones de los números reales.

La enseñanza del concepto de función no es una de las tareas más fáciles de desarrollar por un profesor. Además de tener que trabajar con números reales, al trabajar con funciones emerge una clara dificultad didáctica ante el aprendizaje del concepto función, que consiste determinar una forma visual activa que describa a una función cualquiera. Es decir, es necesario utilizar alguna imagen para visualizar el concepto de una función genérica.

Ya se ha indicado la forma que diversos autores entienden la visualización matemática, sin embargo ninguna de estas nos satisface completamente. Entendemos por Visualización Matemática, véase [13], la generación personal de imágenes icónicas que representan a los objetos matemáticos. La forma de generar dichos iconos es particular de cada persona, pero se inician con la elección de unas representaciones gráficas, una figura o una imagen, que forma parte de la imagen mental, dentro de la cual se cifra, o encripta, información textual, matemática y metamatemática.

Las imágenes icónicas son personales y , probablemente, distintas, tanto para el estudiante como para el profesor. Además, una imagen no siempre permite incrementar la información para encriptar sobre ella, por ello, se hace necesario cambiar de icono a medida que se adquiere más conocimiento sobre algún objeto matemático concreto. Es decir, la imagen inicial no tiene por qué ser permanente una vez visualizado un concepto. Además, hay que tener en cuenta que en la visualización matemática es imprescindible disponer de:

- La imagen real o imagen portadora.
- La información matemática, bien simbólica o bien textual, que se adosa a la imagen.
- Un protocolo personal de codificación de esa información que se plasma en las características visuales en las cual se almacena la información.
- Un protocolo de decodificación que esencialmente consiste en saber sondear la imagen y recuperar la información, una vez determinadas las características visuales.
- Un rango de validez de la visualización. No se puede pensar que alguno de los cuatro anteriores componentes son permanentes ante la evolución del conocimiento de una persona. En general, el estudiante incrementará sus conocimientos sobre el objeto, y necesita una imagen nueva en algunos casos. Piénsese sobre la característica de línea continua que posee la gráfica de cualquier función polinómica. Lo de tener una línea continua debe cambiar si se utilizan otras funciones, por ejemplo, las funciones racionales.

Ante la necesidad inducir en el estudiante la visualización del concepto función, el profesor puede hacer uso de alguno, o todos, los registros de representación de una función citados anteriormente.

Al concepto de función se accede con determinadas restricciones dependiendo del nivel educativo en el que está el estudiante. En una primera etapa, en la que aparecen las primeras funciones polinómicas, se aprecia una sobre utilización del registro de representación textual y del registro tabular. Esto puede ser apreciado al realizar un análisis elemental de los contenidos relativos a función en los libros de Enseñanza Primaria o de Enseñanza Secundaria Obligatoria.

Se trata de iniciar un proceso de pre-Cálculo que permita acceder a nuevas interpretaciones de una forma coherente con las necesidades del Cálculo Diferencial e Integral. En cierta medida, la representación gráfica de una función responde al protocolo de gestionar un conjunto de puntos de la gráfica y unirlos con trazos continuos cuasi rectos.

En los cursos altos de la Enseñanza Secundaria y en el Bachillerato, la utilización del registro simbólico y gráfico adquieren un dominio, prácticamente, total puesto que se presenta el Cálculo en una variable con una profusión de definiciones y resultados con aplicaciones cuasi-directas de dichos resultados. Nuevamente, son los libros de texto de esas etapas los que marcan esas pautas de la utilización de registros de representación con cierto grado de desconexión entre los registro empleados en la etapa anterior, pues el abanico de funciones se amplía con las funciones tradicionales, las combinaciones y composiciones de estas. Se aplican las reglas del Cálculo mediante manipulación de las reglas simbólicas a funciones polinómicas cualesquiera, funciones racionales, algunas de tipo irracional y funciones transcendentes.

El Cálculo se centra en el estudio de funciones haciendo uso de sus características, más que en su utilización y aplicación a la vida real y físico. Por ello, en muchas ocasiones el concepto queda mimetizado con la utilización de alguno de los registros establecidos en la literatura. Una posible forma de comprobar esa mimetización consiste en formular la pregunta: ¿Cómo imaginas que estás trabajando con una función?

Se pueden conseguir una limitada secuencia de contestaciones que responden principalmente a los registros de representación indicados, es decir, o es una expresión, o una formula, o un conjunto de puntos o una curva (sólo ciertas curvas) en el plano.

Recomendamos leer el capítulo 4 de [29] titulado: "*La función como objeto a enseñar, como objeto de enseñanza y como objeto enseñado: Análisis de los programas oficiales, libros de texto y apuntes de los estudiantes.*"

En este sentido, sumar o multiplicar funciones es operar con fórmulas, que sin duda responden a un proceso entendido como manipulación algebraica como si de números se tratara.

En cierto sentido el concepto de función como expresión simbólica se establece como un concepto estático. Recordemos lo dicho en [9, p. 115]: "*Rupturas con el álgebra se notan en el hecho de que una función aparece a la vez como proceso y concepto…*". Igualmente, la gráfica de una función se presenta como otro concepto estático, si bien, este concepto aparentemente queda alejado de la manipulación algebraica.

Una vez difuminada la naturaleza dinámica del concepto de función; la función como proceso, es cuando el estudiante accede a otros niveles educativos donde es necesario realizar la aplicación de funciones. Es la primera etapa universitaria. Emerge una dificultad de adaptación de esos registros de representación de función que le permita evolucionar en un pensamiento práctico, aunque muy abstracto.

¿De qué registros de representación hace uso el estudiante para generar el proceso de aprendizaje del algebra de funciones? Casi con toda seguridad de ninguno de los citados. Poder visualizar estos espacios funcionales es requisito indispensable tener un adecuado proceso de visualización del concepto de función. Por ejemplo, los espacios de funciones continuas, funciones diferenciables, funciones integrables…

4. Laboratorio de Simulación Matemática sobre el concepto de función

Para poder presentar una imagen que facilite el proceso de visualización del concepto de función, hemos desarrollado un LSM empleando distintos registros de representación de funciones. Además, en este laboratorio se muestra la asociación de registros de forma automática. El LSM fácil de utilizar y es opera desde GeoGebra.

Figura 3: Ventana inicial del Laboratorio de Simulación Matemática.

Este laboratorio nos permite mostrar otros dos registros de representación distintos de los citados. Un registro de carácter general, que denominamos registro metafórico, que es válido para representar cualquier función. Otro registro de carácter analógico, que en este caso denominamos registro de movimiento. Este permitirá mostrar la relación funcional de dos magnitudes. Con estos dos nuevos registros se le facilita al estudiante una primera imagen dinámica para generar su propia visualización de función y afrontar las situaciones prácticas de mayor calado en su aprendizaje del Análisis Matemático. Es decir, establecemos un proceso que induce a la de visualización de una "función cualquier" en el estudiante.

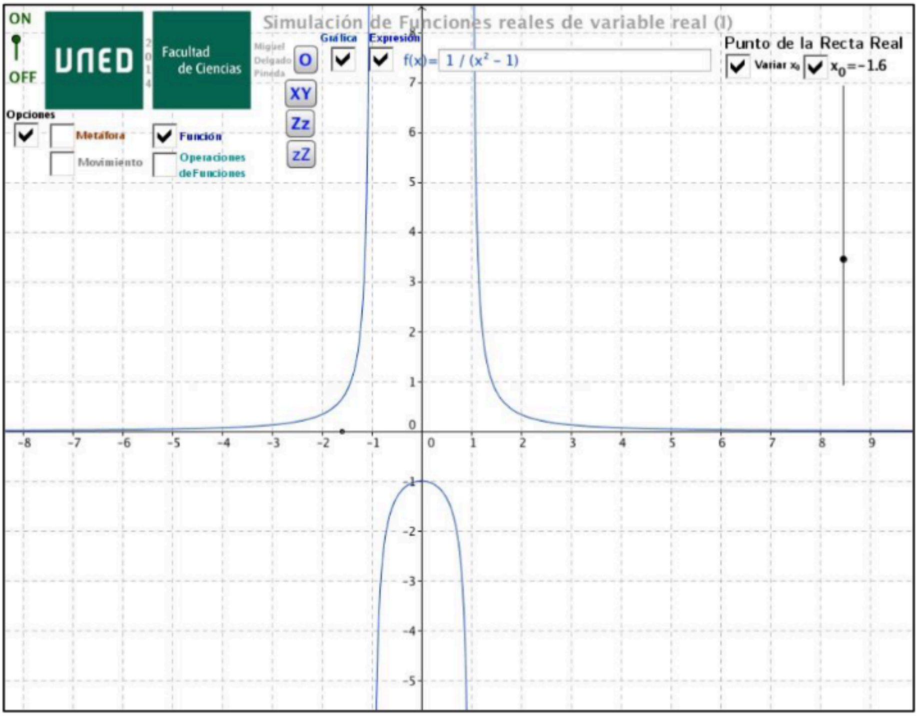

Figura 4: Vista particular de una representación simbólica y otra gráfica.

Al activar el laboratorio desplazando el deslizador a ON, se muestra la casilla de marcado Opción que debe ser marcada para hacer visibles las casillas de marcado Metáfora, Movimiento, Función y Operaciones de Funciones, para permitir al estudiante interactuar con el laboratorio. También, aparecen dos casillas de marcado rotuladas con Variar x_0 y con x_0, bajo el registro Punto de la Recta Real, que están destinadas a simular la variación del número x_0 como número real.

Conviene precisar que decimos "simular", puesto que el conjunto de números disponibles en el laboratorio no es el conjunto de números reales. El procesador del ordenador sólo procesa un pequeño conjunto de números enteros (con aritmética exacta) y otro conjunto pequeño de números decimales finitos (con aritmética no exacta) denominados números punto flotante. Además, si se marcan dos pixeles de la pantalla que correspondan a dos puntos o números cuya distancia sea menor a una centésima, el ojo humano casi no los distingue. Por estos dos motivos, al marcar la casillas Variar x_0 se muestra un deslizador cuyo valor de incremento es 0.1, su mínimo es -10 y su máximo es 10. Aunque, el mínimo, el máximo y el incremento pueden ser variados por el profesor, en esencia, esto no afecta a lo que la simulación muestra en pantalla. Es suficiente experimentar con números enteros y números decimales con un decimal entre -10 y 10. Es decir, esos son los números reales disponibles. Utilizar un deslizador para elegir el valor de x_0 es una herramienta GeoGebra que permite simular a una variable real, puesto las letras x e y son variables internas reservadas para definir funciones, tanto explícitamente como implícitamente.

Con el marcado de la casilla Función se activan otras dos casillas Expresión y Gráfica. Con estas dos casillas se accede a dos de los registros de representación:

- El registro simbólico mediante un campo de entrada datos, rotulado con $f(x)$, para poder escribir, editar y cambiar la regla que define a la función en términos de la variable x.
- El registro gráfico mediante la representación gráfica que genera directamente la aplicación GeoGebra al marcar la casilla gráfica.

Si bien, cualquier expresión matemática con x pueden ser introducidas en el campo de entrada, ejemplo, $\frac{1}{x^2-1}$, ocurre que las expresiones con comandos GeoGebra son aceptadas como entradas. Por ejemplo, $Función\left[\frac{1}{x^2-1}, -3{,}3\right]$ para definir la función y su dominio a la vez; el intervalo $[-3{,}3]$.

Para indicar al estudiante que el registro gráfico posee un nivel de relevancia mayor a estos dos nuevos registros, se establece que marcar la casilla Gráfica imposibilita acceder esos nuevos registros.

Con el marcado de la casillas Metáfora, si está desmarcada la casilla Gráfica, aparecen tres objetos gráficos: Dos especies de bandejas; una a modo de filtro conteniendo un número y otra vacía, y una máquina de rotulo $f(x)$ con una tolva y un grifo del que sale un número. Estos objetos gráficos deben ser situados adecuadamente antes de realizar la simulación, para ello, se dispone de un punto resaltado para realizar el desplazamiento del objeto. La disposición final de estos objetos debe ser: bandeja con filtro sobre la tolva de la máquina y la bandeja vacía debajo del grifo de esa misma máquina.

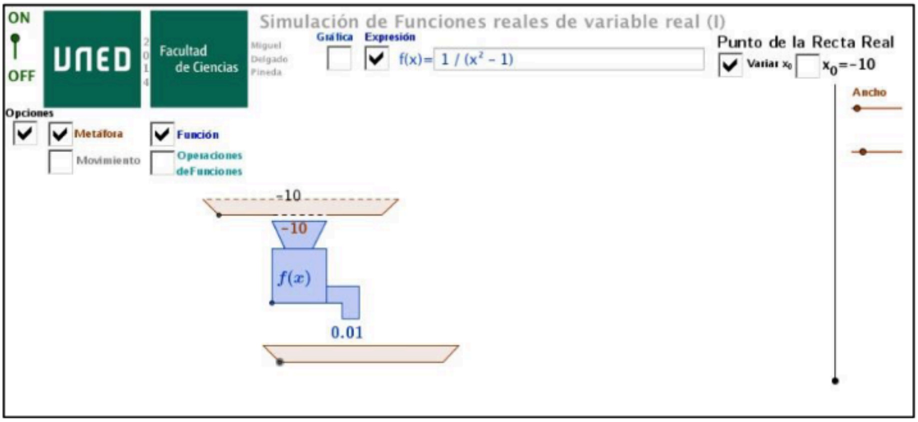

Figura 5: Objetos y operadores del registro metafórico.

Al variar el valor de x_0, actuando sobre el deslizador, se constata la variación numérica que se experimenta en las bandejas anexas a la máquina. Con este conjunto de imágenes sucesivas, que sólo se diferencia en los números mostrados, queremos simular la condición dinámica de una función.

La imagen de la máquina pudiera ser una buena representación estática de una función cualquiera, sin embargo, lo más importante de esta máquina es que permite transferir una idea dinámica del concepto de función. La máquina, como la función, no hace nada si el humano no interactúa con ella. Si no se le aporta una modificación de alimento-número, la máquina-función no cambia su estado de número saliente.

Esta configuración de objetos gráficos constituye un conjunto de signos-iconos, con una sintaxis-reconfiguración y con una traducción directa al registro gráfico que se produce si se marca la casilla Gráfico. Así pues, esto es un nuevo registro de representación independiente de los anteriores.

Sin duda, la bandeja con filtro viene a representar el dominio, mientras que la bandeja vacía representa el rango de la función. Además, la máquina no facilita la posible expresión de la función, sobre todo si se desmarca el cuadradillo Expresión. En sí, esa expresión simbólica no es necesaria si sólo se observa el funcionamiento de la máquina. Esta es la imagen portadora que soporta la visualización matemática de cualquier función, incluso de una función cualquiera. Por tanto, es válida para una función cualquiera de cualquier espacio de funciones.

En la figura 6 se puede observar el comportamiento de la máquina de la figura 5 al ser alimentada con -1. No produce salida, puesto que esa función no está definida en -1.

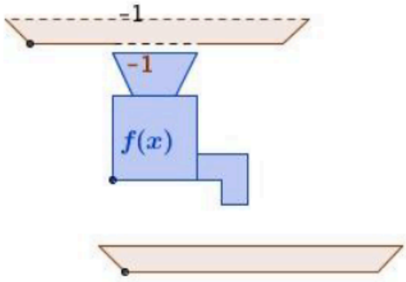

Figura 6: Situación particular de la máquina-función $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

Necesitamos hacer notar que el autor ha utilizado este tipo de máquina con todos sus componentes desde el inicio de su labor docente, año 1978, tanto para la formación de estudiantes como para la formación de profesores. Sin embargo, parece existir una convergencias de representaciones con otros autores, puesto que una máquina similar está presente en [32], en [30] y en muchos libros de texto de Educación Primaria y Educación Secundaria que se editan en España desde hace más de una década.

Con el marcado de la casillas Movimiento, si está desmarcada la casilla Gráfica, aparecen otras tres casillas de marcado con los rótulos Vertical, Horizontal y Curva, y otra casilla para la función rotulada con f. Al marcar la casilla f se está en disposición de interpretar el número $f(x_0)$ como la posición relativa de un punto sobre una recta vertical si se marca Vertical, sobre una recta horizontal si se marca Horizontal, y sobre una curva editable si se marca Curva. Posición en términos de distancia, con signo, de separación de un punto origen o de distancia 0.

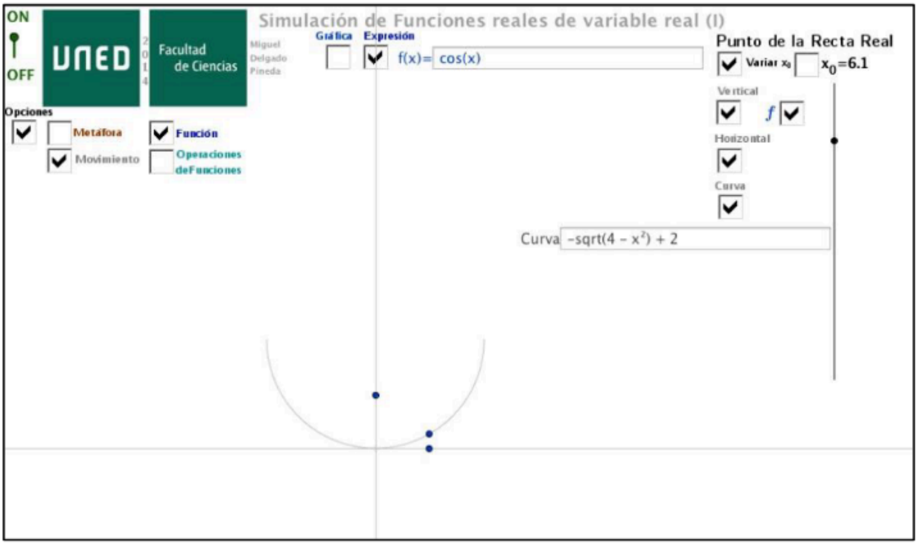

Figura 6: Objetos y operadores del registro analógico.

Al variar el valor de x_0, actuando sobre el deslizador, se puede observar la variación posición que se experimenta el punto señalado en las rectas o curva disponibles. Con esta representación en magnitud posicional, la variación de valores de x_0 se transforma en una idea de movimiento de un punto siguiendo una trayectoria predeterminada. Por ejemplo, la actuación de la función se interpreta bien como la vibración vertical u horizontal del punto, o una situación similar a un movimiento pendular de ese punto.

De nuevo, entendemos que este otro tipo de configuración de movimientos constituyen un conjunto de signos-iconos, con una sintaxis-reconfiguración y con una traducción directa al registro gráfico al marcar la casilla Gráfico. Esto es otro nuevo registro de representación independiente de todos los anteriores, que permite reconstruir la noción de función desde una perspectiva epistemológica.

5. Aproximaciones visuales a las operaciones con funciones y a sus propiedades.

En este laboratorio se dispone de elementos suficientes para afrontar la simulación de las operaciones definidas para funciones, haciendo uso de los distintos registros de representación que incorpora. Esto queda visible si se marca la casilla Operaciones de Funciones. Es decir, construir una función resultado h a partir de dos funciones f y g.

Al marcar la casilla indicada se muestra otro campo de entrada de datos con rótulo $g(x)$ que posibilita escribir la expresión de la segunda función g en la variable x. Además, se muestra un deslizador de rótulo Operación que facilita la elección de la operación que se desea experimentar, y dos casillas de elección: Punto en la gráfica de h y Gráfica de h.

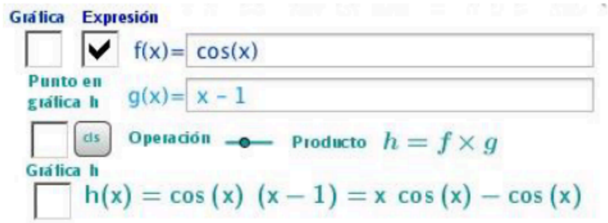

Figura 7: Detalles relativos a Operaciones de Funciones.

En el caso de que la operación sea suma (resta) o producto (división) el estudiante puede ver en pantalla el resultado de la operación simbólica tal y como él lo hace según sus aprendizajes algebraicos. Quizás la composición de funciones sea la operación más novedosa para él. El principal problema que posee el estudiante es cuando de las funciones tan sólo son conocidas por sus gráficas. Es decir, desmarcada la casilla Expresión.

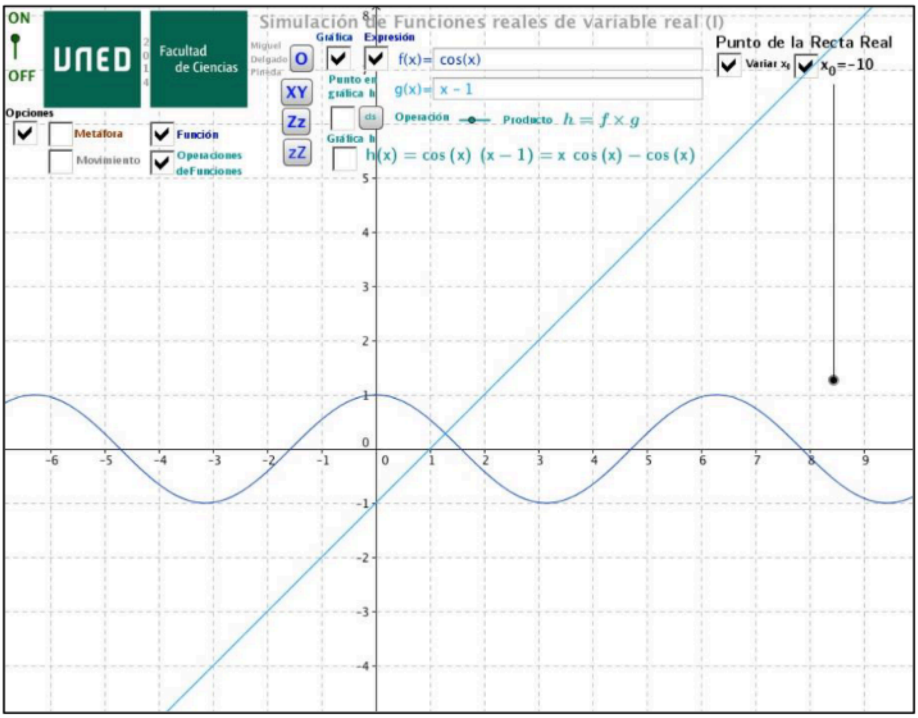

Figura 8: Vista de la ventana con la opción Operaciones de Funciones.

Con el laboratorio se muestra y refuerza el conocimiento sobre operaciones que posea el estudiante. Por definición, la función resultado de la operación de dos funciones se construye punto a punto. Por ejemplo, la función producto $h = fg$ es definida como

$$h(x) = f(x)g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Al marcar la casilla Punto en gráfica h se hace visible el punto $(x_0, h(x_0))$. Si se modifica el valor de x_0, el punto cambia, pero queda el rastro de puntos para valores anteriores de x_0 como se aprecia en la figura 9. Con esta forma de proceder, se fomenta la idea de construcción de la función h punto a punto. Además, se muestran los valores $f(x_0), g(x_0)$ y $h(x_0)$ y el estudiante puede comprobar la operación numérica correspondiente.

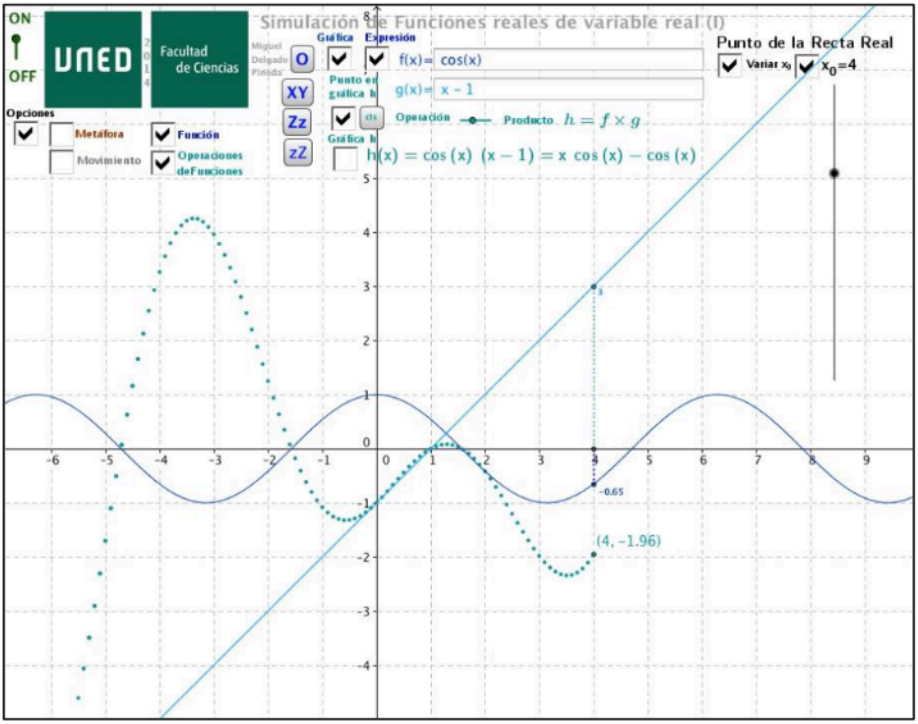

Figura 9: Construcción punto a punto de la función fg.

La simulación de construcción, punto a punto, de la gráfica de la función h se completa al hacer visible la gráfica, para ello, basta marcar la casilla Gráfica h.

Se debe resaltar que la utilización del registro gráfico del que hace uso la aplicación GeoGebra puede inducir a error al estudiante en algunos casos. Por ejemplo, si se consideran las funciones $k_1(x) = \frac{1}{x^2-1}$ y $k_2(x) = x - 1$, entonces no se representa la función producto $k(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$, si no, la función $t(x) = \frac{1}{x+1}$. Es decir, GeoGebra dispone de un método de graficar que no detecta las discontinuidades evitables de forma directa, y muestra esos puntos de discontinuidad como puntos de continuidad.

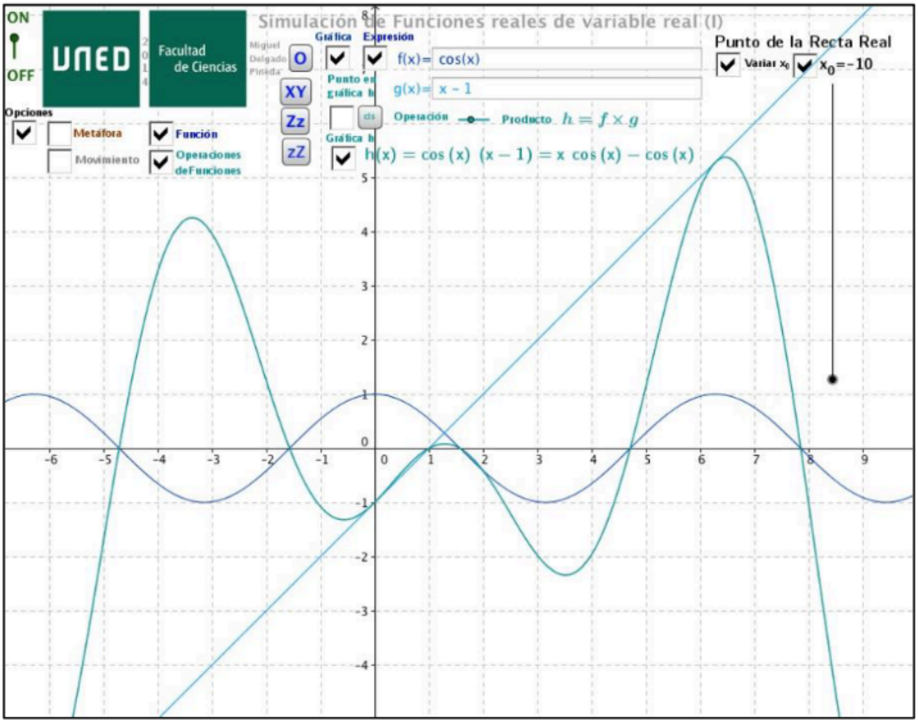

Figura 10: Gráfica de la función fg.

Al utilizar el registro metafórico no se produce ese efecto pernicioso de las discontinuidades evitables del registro gráfico. Las máquinas no generan números si no son alimentadas con los números adecuados. En la figura 11 se muestra una construcción relativa al producto de funciones haciendo uso del registro metafórico del laboratorio. Es evidente que la misma construcción es válida para la suma, resta y división de funciones, lo único diferente es la máquina del operador.

Cabe destacar que el nombre de cada máquina es fijo $f(x)$ y $g(x)$, y que la máquina construida a piezas es $h(x)$. No hemos considerado oportuno que la función resultado posea la misma forma miniatura de las máquinas $f(x)$ y $g(x)$. Consideramos adecuado que si el estudiante desea ver esa máquina miniatura para el resultado desmarque la opción Operaciones de Funciones e introduzca el producto de las dos expresiones en el campo de entrada rotulado con $f(x)$.

La configuración de máquinas de la figura 11 constituye la imagen portadora de las operaciones suma (resta) y producto (división) de funciones para generar el proceso de visualización matemática que debe realizar el estudiante. Hay que tener en cuenta que el laboratorio requiere algún tipo expresión admisible por GeoGebra en el campo de entrada de datos $f(x)$, y si se desmarca el cuadradillo Expresión, la máquina se queda sin referencia alguna a las expresiones utilizadas. Esto permite que la máquina pueda ser considerada una imagen portadora para cualquier función genérica.

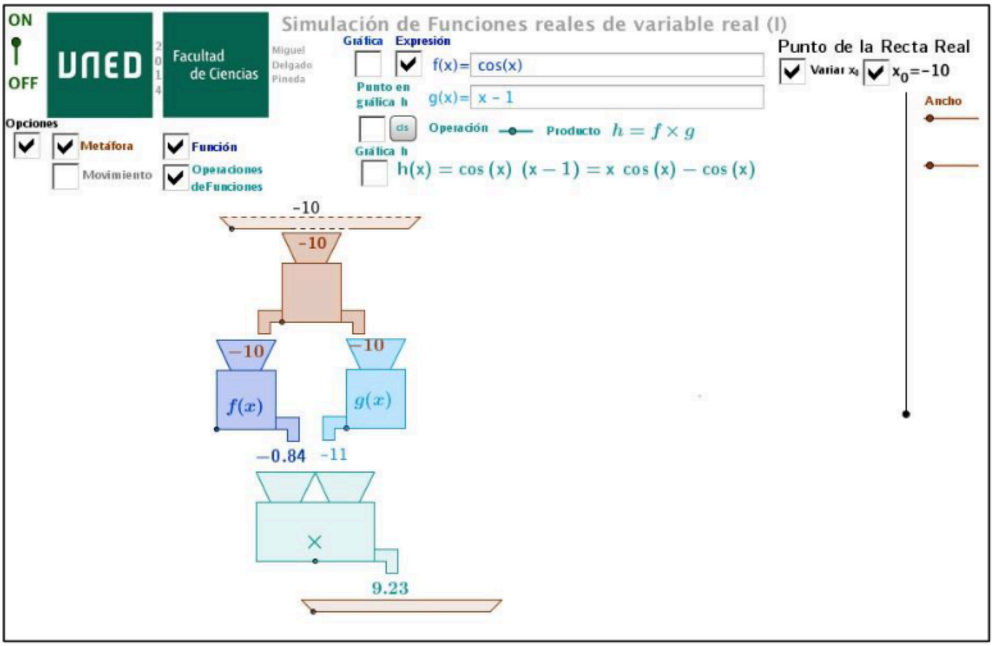

Figura 11: Configuración metafórica para la función fg.

Una de las utilidades que tiene el uso de los objetos máquina y operador, es que permiten iniciar al estudiante, de una forma visual, al estudio de las propiedades que cumplen las operaciones de funciones. Se puedan comprobar en casos particulares, que no demostrar, las propiedades; asociativa, elemento neutro, elemento simétrico y conmutativa, tanto para la operación suma como para la operación multiplicación, y la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma de funciones.

Debido a que el nombre de cada máquina es fijo $f(x)$ y $g(x)$, a la hora de simular la propiedad conmutativa se requiere la permuta de las expresiones en los campos de entrada $f(x)$ y $g(x)$. Por ejemplo, con las funciones $k_1(x) = \frac{1}{x^2-1}$ y $k_2(x) = x - 1$, basta cargar los campos entrada $f(x)$ y $g(x)$ con las expresiones de funciones k_1 y k_2, y una vez realizada la simulación, cargar nuevamente los campos de entrada $f(x)$ y $g(x)$ con las expresiones de funciones k_2 y k_1 para volver a simular. Así, se posibilita simular la propiedad conmutativa. Otro ejemplo para simular la propiedad distributiva con las funciones $k_1(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $k_2(x) = x - 1$ y $k_3(x) = \sqrt[3]{x}$. Se introducen las funciones k_1 y $k_2 + k_3$ en los campos $f(x)$ y $g(x)$ primero, y se introducen las funciones k_1k_2 y k_1k_3 en campos $f(x)$ y $g(x)$ después.

Si el docente propone una actividad como las indicadas en el párrafo anterior, entonces está aportando una situación didáctica de ruptura con la tradicional enumeración de las expresiones simbólicas de esas propiedades que están presentes en los textos. Además, con estas actividades el estudiante forma es parte activa de su aprendizaje, no sólo por interactuar con el laboratorio, si no, por tener que construir una tabla de valores de x_0 relacionados con valores $f(x_0)$. Entendemos que la comprobación de la igualdad de las tablas obtenidas con las dos configuraciones metafóricas no constituye una demostración de la igualdad. Sin embargo, el estudiante adquiere la suficiente convicción de su verdad antes de afrontar el reto de la demostración con funciones cualesquiera.

La operación composición puede fácilmente simularse con las máquinas y no se requiere de máquina operador alguno. Sólo se necesita la adecuada reorganización de máquinas. En la figura 12 se puede apreciar la organización de máquinas para simular a la función $g \circ f$, cuya expresión está expresada en el registro $h(x)$. Al estudiante se le presenta una imagen donde el número que sale de la máquina f entra en la tolva de la máquina g.

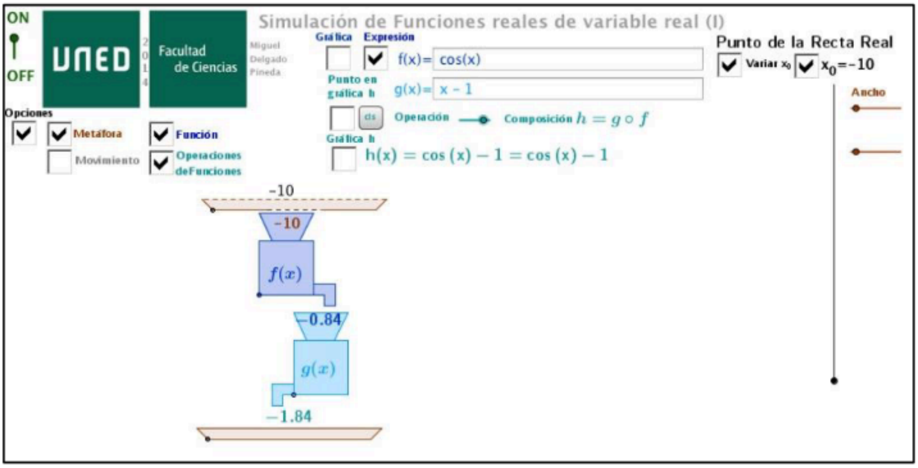

Figura 12: Organización de máquinas para la función $g \circ f$.

La simulación de la propiedad asociativa de la composición es análoga a la indicada para el producto de funciones. El estudiante puede comprobar, directamente, que la composición de funciones no es conmutativa. Sin duda, determinar experimentalmente la función elemento neutro y comprobar la posible existencia de función inversa es una tarea muy interesante para que la desarrolle el estudiante.

6. Reflexión final

Un concepto que tiene una naturaleza dinámica, como es el concepto de función, necesita una imagen intrínsecamente dinámica sobre la cual almacenar la información matemática relativa al concepto.

Si a un concepto dinámico se le asocia una imagen es de naturaleza estática, como puede ser la gráfica de una función, el dinamismo del concepto se lo tiene que dar el estudiante. Por ejemplo, en el caso de la función y su gráfica, el estudiante puede suponer que realiza una reconstrucción punto a punto. También, el estudiante podría interpretar la gráfica como la trayectoria marcada de una partícula adimensional que se mueve en el plano dejando el rastro (la gráfica). Este tipo de dinamización humana permite entender que el concepto de función tiene un pasado histórico de múltiples interpretaciones, y que realizar un estudio epistemológico de este concepto, como el que se presenta en [29] o en [8], el conocimiento de sus génesis.

Si bien es muy importante el cómo ha sido entendido este concepto de función en la historia, la realidad actual marca un concepto de función más general que el de otra épocas. Las interpretaciones existentes en otros momentos dados, estaban adecuadas a las funciones de interés de esas épocas. Esas funciones constituyen un subconjunto de las actuales funciones para las cuales la interpretación sigue siendo válida. Esto no invalida que actualmente podamos utilizar los medios a nuestro alcance, como los ordenadores, para generar nuevas interpretaciones adecuadas a todas las funciones de nuestra época. De ahí, que el registro metafórico sea de gran utilidad, entendiendo por máquina algo (ordenador, proceso, persona…) que al aportarle un número, nos devuelve otro.

7. Bibliografía.

[1] Adams R. A. *Cálculo*. Ed. Addison Wesley. (6ª Ed) 2009 (Madrid).

[2] Alves Dias, M. Articulacao entre os diferentes registros de representacao simbólica en Geometría Afim. Revista UNIFIEO. Cuaderno de Pesquisa IFIP, VI(10). 2007.

[3] Alsina Catalá, C. *Math made visual: creating images for understanding mathematics*. The Matematical Association of America. 2006 (Washington)

[4] Arcavi, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. For learning of mathematics, 14 (3), 2003.

[5] Arcavi, A. Developing and using symbol sense in mathematics. For learning of mathematics, 25 (4), 2005.

[6] Aposto T.M. *Análisis matemático*. (2ªEd.) Ed Reverté. 1976 (Barcelona)

[7] Bills, L. et allí. Exemplification in mathematics education. Proceeding of 30th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Eduaction. Vol.1. 2006 (Praga)

[8] Cuevas, A. & Díaz J.L. La historia de la matemática un factor imprescindible en la elaboración de una propuesta didáctica.El caso del concepto de función. El Cálculo y su Enseñanza. Año 5. Vol.5. 2014. Cinvestav-IPN (México)

[9]Cuevas C. Et alii. *La enseñanza del cálculo DIFERENCIAL E INTEGRAL*. Pearson Educación. 2013 (México).

[10] Davis, P.J. Visual theorems. Educational Studies in Mathematics, 24(4), 333-334. 1993.

[11] Delgado Pineda, M. Objetos matemáticos dentro del marco de una Matemática visual. Memorias del Simposio de Educación Matemática SEM, Edumat. 2009 (Chivilcoy)

[12] Delgado García M. & Delgado Pineda M. *Análisis Matemático: Números, variables y funciones*. (2ª Ed.) Ed. Sanz y Torres. 2015 (Madrid).

[13]Delgado Pineda, M. & Ulecia García, T. Visualización en el Análisis Matemático: Aprendizaje matemático basado en el tratamiento de imágenes dinámicas que posibilitan el modelado de objetos de esta área de conocimientos. Memorias del Simposio de Educación Matemática SEM, Edumat. 2009 (Chivilcoy)

[14] Díaz Gómez J.L. Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones. El Calculo y su Enseñanza, Edita CINVESTAV-IPN, Vol. 4, pág (13-26) 2007 (México).

[15]Dörfler, W. Mathematical reasoning: Mental activityor practice with diagrams. Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education. 2004 (Copenhagen)

[16]Duval, R. Representation, visión an visualitation: Cognitive functions in mathematics thinking. Basic issue for learning. Proceeding of 21th Annual meeting of North American Chapter of International Group for thr Psychology of Matematical Education. 1999 (Cuernavaca)

[17] Duval, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of Mathematics. Educational Studies in Mathematics. 61(1-2). 2006

[18] Filloy, E. & Sutherland, R. Desingning curricula for teaching and learning algebra. Internatinal handbook of mathematicics education. 1996.

[19] Fischbein, E. Intuition in science and mathematics: an educational approach. 1987.

[20] Gueudet-Chartier, G. Geometrical and figjral models in Linear Algebra. Proceeding of the 2thInternatinal Conference on the teachingof Mathematics. 202 (Crete)

[21]Guzman, M. de. *El rincón de la pizarra: Ensayos de visualización en Análisis Matemático: Elementos básicos del Análisis*. Ed. Piramide. 1996 (Madrid)

[22] Hillel, J. *Modes of description and the problema of representation in Linear Algebra*. Kuwer Academic Publishers. 2000.

[23] Hitt, F. *Representations and Mathematic Visualization*. Departamento de Matemática Educativa Cinvestav. 2002 (México)

[24] Hoffman D.D. *Inteligencia visual. Cómo creamos lo que vemos*. Ed. Páidos Ibérica. 2000 (Barcelona).

[25]Larson R.E., Hostetler R. P. & Edwards B.H. *Cálculo*. Vol 1 (6ª Ed.) Ed. McGraw-Hill. 1999 (Madrid).

[26] Presmeg, N. Generalization using imagery in Mathematics. In Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images. Mahwah 1997 (New Jersey)

[27] Presmeg, N. On overarching theory for research in visualization in Mathematics Education. Proceeding of the 11th International Congress on Mathematics Education. 2008 (Monterey).

[28] Presmeg, N. Research on visualization in learning and teaching mathematics. In Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future. Sense Publishers. 2006.

[29] Ruiz Higueras, L. *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Ed. Universidad de Jaen. 1998 (Jaen)

[30] Sierpinska, A. On undesrtanding the notion of function. The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. Mathematical Association of America. Notes Series, Vol. 25, pp. 23-58. 1992 (New York).

[31] Stein S.K. & Barcellos A. *Cálculo y Geometría Analítica*. Ed. McGraw-Hill. Vol 1 (5ª Ed.) 1995 (Colombia).

[32] Stewart J. *Cálculo de una variable*. (4ª Ed.) International Thomson Editores. 2001 (México).

[33] Tall, D. & Vinner,S. Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics. 12(2). 1981.

[34] Zimmermann, W. & Cunningham, S. Visualization in teaching and learning mathematics. Mathematical Association of America.1991 (USA).