El concepto de la derivada en el contexto de la enseñanza de la física, recursos para el uso de diferenciales y las tecnologías de información y comunicación.

Alfredo Martínez Uribe, François Pluvinage & Luis Manuel Montaño Zetina
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
México
alfymago@hotmail.com; fpluvinage@cinvestav.mx; lmontano@fis.cinvestav.mx

Resumen. El concepto de la derivada es imperativo en el ámbito de la física. Sin embargo, con frecuencia en su enseñanza, este concepto y otros aparecen apresuradamente, fuera de cualquier contexto didáctico. El enfoque histórico que se ha dado a los conceptos relacionados puede contribuir a la comprensión de los estudiantes. Además, las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) utilizadas para modelar fenómenos permiten la organización de redes y la promoción de laboratorios virtuales. De esta manera los estudiantes tendrán una gran variedad de enfoques tanto para comprender los fenómenos físicos como el lenguaje en el que se explican. En nuestro caso, se pretende discutir algunas cuestiones en las que surge la necesidad de utilizar la derivada para describir diferentes comportamientos físicos. También es nuestra intención proponer estrategias didácticas menos tradicionales que aprovechen el uso de las tecnologías digitales como videograbación, Video-análisis por smartphones, sensores, entre otras cosas para enseñar tanto los aspectos físicos y matemáticos de los temas estudiados.

Palabras clave: diferenciales, modelización, semiótica, enseñanza de la física, TIC

Abstract. The concept of derivative is imperative in the realm of physics. However, frequently in his teaching, this concept and others appear hastily, outside of any didactic context. The historical approach that has been given to related concepts can contribute to students' understanding. In addition, the information and communication technologies used to model phenomena allow the organization of networks and the promotion of virtual laboratories. In this way the students will have a great variety of approaches both to understand the physical phenomena and the language in which they are explained. In our case, it is intended to discuss some issues in which the need arises to use the derivative to describe different physical behaviors. It is also our intention to propose less traditional didactic strategies that take advantage of the use of digital technologies as video recording, video-analysis by smartphones, sensors, inter alia to teach both the physical and mathematical aspects of the subjects studied.

Key words: differential, modeling, semiotics, physics teaching, TIC

1. Construyendo semiótica

El problema surge con el movimiento cuando se pretende describirlo utilizando un registro de representación distinto al lenguaje oral (Freuthental, 1983; Karplus, Pulos y Stage, 1983). El registro más natural para el ser humano además del lenguaje, sin poder describir cuál es el que precede a cuál, es el gráfico (Leo Corry, 1997). Es por ello tal vez que para describir el movimiento se aludió históricamente a los dibujos o esquemas, y puesto que la geometría euclidiana (Suisky, 2009) se desarrolló prontamente, también se echó mano de ella.

Fecha de recepción: 13-03-2017
Fecha de aceptación: 02-06-2017

Es en siglo XIV cuando los lógico-matemáticos del Merton College de Oxford (1330-1340) conocidos como *Calculadores*, estudiaron el movimiento de los cuerpos. Ellos introdujeron la idea de establecer relaciones funcionales para describir magnitudes cualitativas como la velocidad, la distancia o el tiempo con características cuantitativas medibles. Esos estudiosos también definieron varias clases de movimiento, propusieron teoremas concernientes al movimiento y los probaron matemáticamente. Sus pruebas se basaron en la geometría Euclidiana (Farmaki, Klaudatos y Paschos, 2004).

Existieron algunos esfuerzos para resolver el problema de las velocidades desiguales, sin embargo, no pudieron concretarse. Es hasta la deducción hecha por Galileo en los *Discorsi*, en donde a falta de poder experimentar con sus ideas sobre caída libre; ingeniosamente *diluye* el movimiento al de una bola cayendo a lo largo de un plano o riel con pocos grados de inclinación (ángulos agudos), lo que le permitió extrapolar el caso de caída libre para cuando el ángulo de inclinación es de 90º (Fernández y Rondero, 2001).

Es muy probable que Galileo ya conociera el trabajo de los Calculadores, puesto que utiliza representaciones similares para la velocidad media y la aceleración.

Aunque Galileo (1564-1642), Descartes (1596-1650) y Fermat (1601-1665) fueron contemporáneos, el espacio plano de Descartes no era usado de forma extensa todavía como sistema de representación, pero comenzaba a reconocerse la posibilidad de hacer procesos de conversión entre la geometría, el álgebra y la trigonometría (Stewart, 2012).

Fermat advirtió un principio general que dice que si las condiciones impuestas sobre los puntos en el plano pueden expresarse como una única ecuación que incluye dos incógnitas, el lugar geométrico correspondiente es una curva (en el sentido matemático).

Descartes por su parte introdujo en *La geometría*, un apéndice de su *Discurso del método*, la idea de un sistema de coordenadas, en el que la geometría del plano puede reinterpretarse en términos algebraicos. Se trata de escoger un punto en el plano al que se le llama origen, se trazan dos líneas o ejes que pasan por el origen que a su vez se cortan en ángulos rectos. Al eje horizontal se le etiqueta con el símbolo x y al eje vertical con el símbolo y. De manera que cualquier punto P en el plano está determinado por el par de distancias (x, y), lo que refiere lo lejos que está el punto del origen con respecto a los ejes x y y (Stewart, 2012).

Descartes propuso tres principios para describir el movimiento:

a) De la conservación de estado.

b) La continuación del movimiento en dirección rectilínea se modifica sólo debido a una causa externa.

c) La interacción de los cuerpos en términos de sus fuerzas

El tercer principio originó un debate y una separación entre algunos como Leibniz y Newton. El problema radicó sobre todo en la suposición de Descartes de que la causa del movimiento era una fuerza interna de los cuerpos, y la causa del reposo una fuerza externa.

Además, Newton no quiso dar crédito al trabajo de Descartes y formuló el cambio de la cantidad de movimiento no en términos de su conservación sino de en términos del tiempo y un espacio absoluto, un punto de vista más geométrico, que el de Leibniz, quien intentó generalizar los procesos de cambio para dos variables cualesquiera (Suisky, 2009).

A pesar de los desacuerdos, se aceptó que debía haber principios detrás de los fenómenos que tenían que ser descubiertos, a los que se les llamó fuerzas de la naturaleza, que todavía hoy se discuten su origen y sus efectos y porque causan movimiento o cambio de movimiento en los cuerpos.

El debate pudo haber empezado con Aristóteles quien propuso que la velocidad era proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a la resistencia del medio, que se podría expresar como: $F \propto \frac{v}{R}$.

Arquímedes consideró el equilibrio de fuerzas para el modelo de la palanca y Galileo inventó un modelo alternativo y descubrió que el movimiento uniforme tiene lugar sin que se necesite de una fuerza que vaya detrás del cuerpo causando el cambio de su posición.

Para Newton, un ser tan actual antes como ahora (ver Figura 1), en el estudio de la mecánica clásica, los fenómenos físicos y las fuerzas están relacionados entre sí. Una vez que se dilucido el misterio del movimiento, y que se aceptó que para que un objeto se mueva no necesariamente tendría que haber una fuerza que motivara su movimiento, se pudo hablar de las fuerzas por un lado y del movimiento y sus causas por otro.

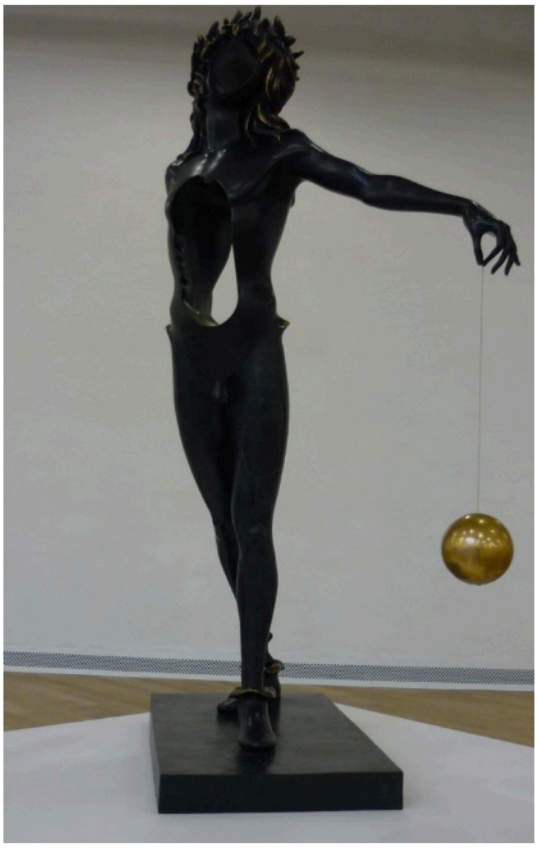

Figura 1. Newton, Salvador Dalí (Figueras, España, 1904 – 1989). Museo Soumaya, plaza Carso, México.

La primera ley de Newton es referida por diversos autores (Resnick, 1999; Spivak, 2010) como la ley de los sistemas de referencia. Porque para entender que causa el cambio de la velocidad, es necesario aceptar que estamos inmersos en un sistema de espacio, y masas en el que todo el tiempo está presente la acción de por lo menos una fuerza. Es decir, Newton no comenzó por entender cómo interactúan las fuerzas, sino a qué se debe el cambio en la velocidad y más concretamente en la cantidad de movimiento de los cuerpos.

Una vez que estableció que, en el momentum o cantidad de movimiento, la velocidad puede aumentar o disminuir en proporción con la cantidad de materia, entonces el cambio en la velocidad de ese momentum se explicó como la aceleración que aumenta o disminuye dependiendo de la cantidad de materia. Para explicar cómo es que se dan los cambios en el tiempo a los que nos hemos estado refiriendo, Newton tuvo que desarrollar una herramienta poderosa que hoy se conoce como el cálculo diferencial e integral, en el que la derivada aparece como una razón de cambio de la distancia con respecto al tiempo, o de la velocidad con respecto al tiempo, pero se discutirán con más detalle algunas de estas relaciones en la siguiente sección.

En este sentido es que los cuerpos tienden a seguir en su estado de reposo o movimiento, mientras que no haya una fuerza que modifique ese estado, dentro de un sistema inercial.

Para Spivak (2010) la segunda Ley de Newton puede entenderse como un axioma en el que primero se explica el cambio en la cantidad de movimiento y después se trata de definir lo que es la fuerza. Es por eso tal vez, que la fuerza queda definida como la acción que causa el cambio en la cantidad de movimiento de los cuerpos.

La tercera ley de Newton está basada en el principio de conservación de la cantidad de movimiento, que puede notarse de manera más sencilla por las acciones en direcciones contrarias de los cuerpos. Un ejemplo muy ilustrativo lo otorgan los choques en los que los cambios en la cantidad de movimiento se dan en tiempos muy cortos, sin embargo, lo que siempre permanece o se conserva es la cantidad de movimiento (Spivak, 2010).

La intención de este pequeño análisis histórico radica en que se considera importante la construcción del concepto de la derivada, que proviene no sólo del campo de las matemáticas, sino también y en grado importante del estudio de la física, más concretamente del estudio del movimiento y sus causas. Se pretende también tener en cuenta en todo momento la relación tan estrecha que hay entre el estudio de la física y la matemática dándole sentido una a la otra, un aspecto que podría considerarse con mayor énfasis en la enseñanza y en el diseño curricular de todos los niveles educativos (Martínez-Torregrosa, López-Gay y Gras-Martí, 2006; Kidron, 2011 y Redish y Kuo, 2015).

2. Fenomenología didáctica

Cómo se decidió lo que en el ámbito de la física se debía enseñar o aprender, es difícil distinguirlo, sin embargo, una buena pista la puede proveer la historia que acompaña a la publicación del libro de texto de física. En especial se puede enfocar la mirada en el *Traité Élémentaire de Physique Expérimentale et Appliquée* editado por Adolphe Ganot en 1851, un libro de texto muy relevante por contener lo más reciente de los resultados en investigaciones hechas en el tema de la física, esquemas detallados de aparatos de experimentación, capítulos autocontenidos para priorizar su enseñanza y secciones de problemas con su solución, que llama la atención no sólo por su estructura sino su también por su distribución (Figura, 2).

Ganot produjo 18 ediciones de su tratado, vendiendo 204,000 copias con traducción a 13 lenguas. Incluso algunos lo han considerado un buen ejemplo de lo que Khun denominaba "ciencia normal" (Simon, 2016).


TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
DE PHYSIQUE
EXPÉRIMENTALE ET APPLIQUÉE
ET DE
MÉTÉOROLOGIE
SUIVI D'UN RECUEIL DE 103 PROBLÈMES AVEC SOLUTIONS
ET D'UNE PLANCHE COLORIÉE
PAR A. GANOT
TREIZIÈME ÉDITION
Plus 45 Figures refaites et modifiées
PARIS
CHEZ L'AUTEUR-ÉDITEUR
1868

Figura 2. Portada Ganot-1868

Este tratado fue utilizado en Francia ampliamente por estudiantes de secundaria alta y candidatos a conseguir grados universitarios en ciencias, ingeniería y medicina. En Inglaterra, algunos críticos equiparan el progreso de la ciencia en la educación escolarizada con el ritmo de publicación de las sucesivas ediciones de los libros de texto de Ganot, quienes contaban con un lugar en las listas de lectura de las principales escuelas y universidades de enseñanza de las ciencias, en las universidades, academias militares, y facultades de medicina. En Estados Unidos su impacto también fue muy importante, al ocupar un lugar especial entre los estudiantes del Harvard College, el Massachusetts Institute of Technology, y la Universidad de Michigan. Apareciendo en las listas de lectura de los principales colegios técnicos, militares y de medicina de oriente y occidente, así como en los principales colegios femeninos de enseñanza de Ciencias (Simon, 2016).

Una vez señalada la importancia de este libro texto, vale la pena revisar la propuesta que hace el autor para proponer las nociones de la dinámica. A pesar de haberse tomado la libertad de introducir la noción de límite en un aparatado de cinemática, para para poder definir la velocidad instantánea, cuando se define la fuerza, la aceleración y sus efectos, se hace casi sólo de forma conceptual y los experimentos propuestos son sobretodo experimentos mentales usados para motivar la observación en el estudiante. Es decir, se busca construir una definición, la de velocidad instantánea como derivada de la distancia con respecto al tiempo, pero no se usa ni se aplica de ese modo. Queda claro que por eso se trata de un libro que fue utilizado, sobre todo como introductorio a los cursos universitarios.

Parece que éste libro marcó la tradición para escribir textos de enseñanza de la física a nivel secundaria y bachillerato e incluso a nivel universitario, en los que se propone la observación de los fenómenos a partir de la reflexión sobre situaciones hipotéticas o incluso ideales, la memorización de fórmulas y la resolución de problemas.

Esta tradición se observa todavía, al menos en los libros utilizados por las universidades en América Latina para la enseñanza de la física, en la que los Best Seller provenientes de las universidades estadounidenses, se han convertido en los textos aprobados para sus cursos introductorios de física.

Sin embargo, existió un esfuerzo importante, que surge en los Estados Unidos con la participación de varias universidades y organizaciones, dirigidos por el Instituto Tecnológico de Massachusetts, en el que se encargaron de diseñar materiales específicos para la enseñanza de la física, tales como textos con ilustraciones atractivas de experimentos que también podían ser observados en videos, películas, pruebas estandarizadas, aparatos para laboratorio de bajo costo, entre otros. Todo ello se debió a la preocupación que se dio en el país por el retraso en la carrera espacial y el éxito de Rusia al poner en órbita su primer satélite.

A este proyecto de le llamo el Physical Science Study Commitee, un texto en el que se proponen acercamientos interesantes para el estudio de la física[1]. En él se presenta una propuesta para observar las consecuencias de la acción de una fuerza, es decir, observar el cambio en la cantidad de movimiento debido a la acción de una fuerza.

La propuesta comienza con una pregunta: ¿Qué relación existe entre la fuerza y el cambio de velocidad?

Entonces, para poder contestar la pregunta se describe un experimento en el que se le aplica una fuerza "simple" a un disco que se desliza sobre una superficie sin fricción que es fotografiado con una luz estroboscópica, primero a intervalos de $\frac{1}{5}$ de segundo y después a intervalos de $\frac{1}{10}$ con la aplicación de una fuerza doble, todo con la finalidad de llegar a la deducción de que el incremento de la velocidad crece en el intervalo de tiempo y es mayor cuanto mayor es la fuerza aplicada. Aunque no se presenta en el texto una expresión, al usar el símbolo $\propto$ para expresar proporcionalidad, lo anterior se podría resumir como:

$$F\Delta t \propto \Delta v$$

En un apartado posterior se discute que el cambio en el incremento de la velocidad producido por una fuerza determinada que actúa durante un determinado tiempo depende de la cantidad de materia del objeto sobre el que actúa la fuerza. Así que, el factor de proporcionalidad es la masa de los cuerpos, por lo que la expresión anterior puede escribirse como:

$$F\Delta t = m\Delta v$$

Estas propuestas de trabajo brindan acercamientos distintos a la construcción de los conceptos.

En el texto de "Física" del PSSC (1970) se observa, como en otros dedicados a la enseñanza de la física en secundaria (González y Pita, 2014; Gutierrez y Zarzosa, 2015 y Gutiérrez, Pérez y Medel, 2012) y al nivel medio superior (Tippens, 1988 y Alvarenga, 1988), que los cambios de posición o de velocidad se expresan sobre todo como incrementos, utilizando el símbolo delta para describirlos.

Por alguna razón, se ha considerado irrelevante aclarar al estudiante la procedencia de la notación y la interpretación física y matemática que subyace.

En Ganot (1865) dice en una nota sobre la notación: "*El signo Δ colocado delante de una letra como e ó t es un símbolo usado en álgebra para designar un aumento determinado de la magnitud que representa la letra*".

En los libros de física de nivel secundaria (González, Lluis y Pita, 2014; Gutierrez y Zarzosa, 2015 y Gutiérrez, Pérez y Medel, 2012) algunos autores utilizan conceptos relacionados con el uso de los números reales, en un nivel donde todavía no se habla de conjuntos numéricos.

[1] http://libraries.mit.edu/archives/exhibits/pssc/

Por ejemplo, en vez de introducir el desplazamiento $\Delta x = x_f - x_i$, consideran $\Delta x = |x_f - x_i|$.

El uso más extendido para el símbolo Δ en estos libros es el de magnitud matemática, pero en el contexto de la física, es decir una magnitud matemática que es usada para representar un proceso físico como resultado de una medición que se hace con instrumentos apropiados. En otros casos se utiliza como la interpretación de la distancia euclidiana, es decir, la distancia más corta entre dos puntos en un espacio plano.

Apostol (2009) expresa que esta notación es introducida por Leibniz como el operador *diferencia*, para expresar precisamente la diferencia entre dos valores numéricos. El límite del cociente de diferencias es lo que denominamos derivada, que Leibniz designaba por $\frac{dy}{dx}$, así que, actualmente podemos escribir:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Para Leibniz el límite $\frac{dy}{dx}$ lo consideraba como un cociente de cantidades infinitesimales *dy* y *dx* que llamaba diferenciales y la derivada $\frac{dy}{dx}$ era un cociente diferencial. Leibniz no pasaba por el proceso de límite para definir las derivadas porque consideraba que *dy* y *dx* simplemente se transformaban en infinitesimales *dy* y *dx*. Porque Leibniz imaginaba los infinitesimales como un nuevo tipo de números que sin ser cero eran más pequeños que cualquier número real positivo. Para Leibniz, en contraposición con el enfoque de Newton, estas cantidades no deben ser interpretadas mecánicamente, porque pueden considerarse cantidades puramente matemáticas.

Actualmente la Teoría IST (Internal Set Theory) de Edward Nelson (1977)[2], que axiomatiza una porción del Análisis no estándar de Abraham Robinson, provee un fundamento teórico con el rigor suficiente para aceptar dentro de la lógica matemática la existencia de este tipo de números.

Entonces surge la pregunta ¿cuál es la razón de que en algunos textos de física de nivel secundaria y nivel bachillerato no utilicen las notaciones *dx*, *dy* o más generalmente *d*, sino solamente la notación Δ?

Se podría decir que tal vez se pretende evitar el uso formal del concepto de derivada aplicado en la física o porque los cambios expresados como diferencias finitas permiten una aproximación suficiente a ciertos fenómenos observados.

El uso de estos pequeños incrementos también podría estar evidenciando una visión del estudio de la física en la que los acercamientos a la descripción del problema se consideran suficientes, dependiendo de la resolución que se tiene para mirar y la precisión para medir (Moreno, 2014).

[2] https://web.math.princeton.edu/~nelson/books/1.pdf

Lo que parece vislumbrarse es que el diseño del currículo de física desde el nivel básico, así como el del cálculo comparten los problemas relacionados con los conjuntos numéricos que se utilizan, su axiomatización matemática y el momento didáctico para introducir conceptos como el de límite (Moreno, 2010).

Una pregunta que surge entonces es: ¿Cómo se ha diseñado el currículo? Ha sido diseñado por físicos, a partir de su propia interpretación de la matemática, o por matemáticos, a partir de su propia interpretación de la física. Sería deseable que ambas disciplinas formaran un acuerdo para la enseñanza.

3. Modelización y uso de tecnología.

Considerando que la física tiene como propósito la descripción y comprensión de los sistemas físicos (López-Gay, Sáez y Torregrosa, 2015) y que el lenguaje aceptado para hacerlo son las matemáticas (Redish y Kuo 2015), se puede decir entonces que la matematización es una parte importante de la construcción de los conceptos físicos.

Para describir entonces la naturaleza el ser humano ha requerido proponer modelos, que permitan idealizarla y simplificarla, rasgo importante del pensamiento físico. De manera que, el proceso de modelización matemática y proceso de modelización física no difieren en mucho, porque un modelo matemático puede estar simplemente representando un modelo físico en un lenguaje matemático que lo cuantifica (Uhden, Karam, Pietrocola y Pospiech, 2011). Los modelos físicos permiten analizar casos particulares que las matemáticas han retomado para su generalización

Existen algunas propuestas que retoman esquemas de modelización para poder enfrentar los obstáculos que ofrece la matematización de la física (Uhden, Karam, Pietrocola y Pospiech 2011), sin embargo, se considera sumamente relevante resaltar el proceso de modelización, como lo ha descrito Touma (2009) y retomado por Martínez (2014), en el que para poder realizar la modelización de un fenómeno físico es necesario partir del marco de racionalidad de la física, hacer una interpretación inductiva del fenómeno y trasladarlo al marco de la racionalidad de la matemática, aprovechando sus distintos registros de representación semiótica posibles, para luego reinterpretar el fenómeno a partir de sus representaciones cerrando el ciclo de modelización realizando una interpretación deductiva (Figura 3).

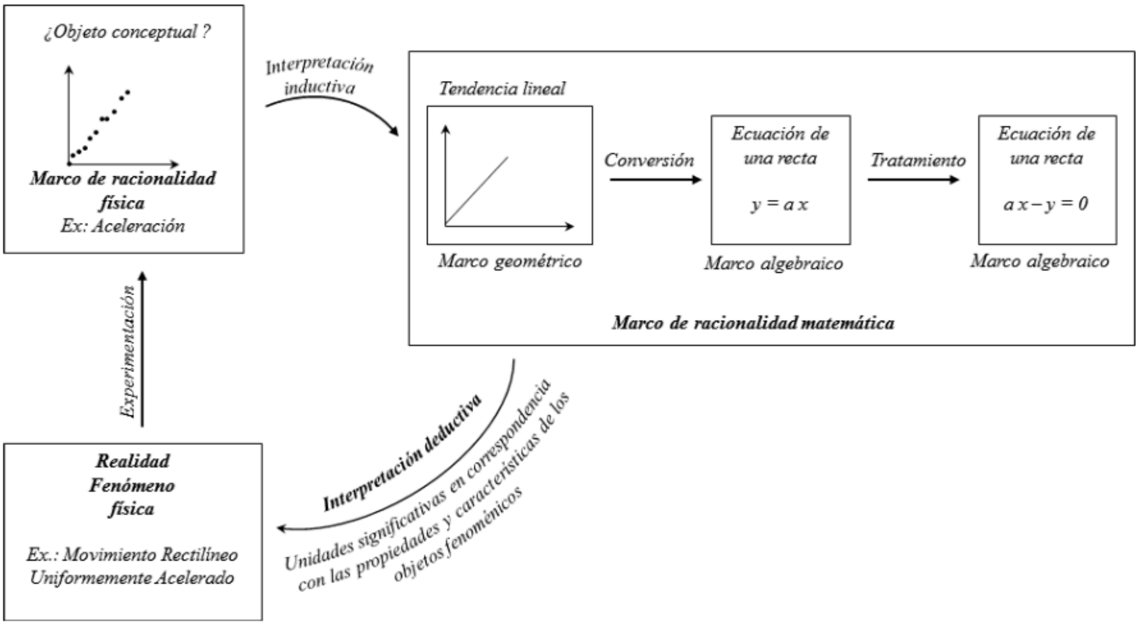

Figura 3 Interpretación inductivo-deductiva (Touma, 2009, modificado)

Además, se debe aprovechar el hecho de que, el uso generalizado de las tecnologías digitales y concretamente los dispositivos móviles proveen de herramientas suficientes para la realización de la modelización de muchos fenómenos.

Este tipo de actividades podrían resultar más significativas al introducirlas desde el nivel de secundaria. Actualmente es posible grabar un video en el teléfono móvil, introducir un sistema de referencia a escala o sin ella, obtener los datos de cada cuadro de movimiento grabado en el video, para contar finalmente con la tabla de datos y graficar la nube de puntos correspondiente, el ajuste de curva se puede hacer a distintos niveles de profundidad y de aproximación, lo que conlleva también un nivel distinto de matematización.

4. Usos de la derivada, recursos y esquemas conceptuales.

En el estudio de la física y en su enseñanza el concepto de derivada tiene un papel fundamental. Se podría intentar proponer el cómo debería entenderse el concepto dentro del contexto de la física, sin embargo, no encontraríamos resultados provechosos, porque se trata de un concepto que los físicos usan incluso antes de haber tenido una base teórica matemática rigurosa que la sustentara.

Cuando se usa el cálculo diferencial en situaciones físicas, el concepto básico que aparece en el proceso de matematización es el de diferencial, que hace referencia a variables independientes y a partes de expresiones diferenciales (Martínez-Torregrosa, López-Gay y Gras-Martí, 2006).

Hu y Rebello (2013) han detectado algunos usos que hacen los estudiantes de los diferenciales cuando se enfrentan a la resolución de problemas de física, que han clasificado como recursos y esquemas conceptuales.

Recursos detectados para el uso de diferenciales		Esquemas conceptuales asociados al uso de diferenciales	
Pequeña cantidad (Pc)	Una pequeña cantidad de una cantidad física	Objetos (Ob)	Términos diferenciales representan a un objeto pequeño
Punto (Pt)	Un punto adimensional que a veces se acompaña de alguna representación visual	Localizaciones (Ll)	Términos diferenciales son localizados en el espacio como puntos a lo largo de una línea
Diferenciación (Df)	Obtener la derivada de una función cambiante seguida comúnmente de operaciones matemáticas	Máquinas (Mq)	La forma $d[\ \ ]$ o $\int[\ \ ]$ es una máquina que realiza un algoritmo
Variable de integración	Una variable que puede ser integrada	Movimiento a lo largo de una trayectoria (Mt)	En la diferencial $d[\ \ ]$, la variable dentro del corchete es un viajero moviéndose a lo largo de una trayectoria.

Tabla 1. Recursos y esquemasconceptuales detectados por Hu y Rebello (2013)

De acuerdo con Hammer (citado en Hu y Rebello, 2013) los recursos son elementos a pequeña escala de conocimiento que usamos día a día para darle sentido a las cosas. Por otro lado, los esquemas conceptuales son una clase de conocimiento intuitivo que describe conexiones entre los dominios fuente, que provienen comúnmente de nuestras interacciones con el mundo físico, y conceptos abstractos en dominios-objetivo como son las matemáticas. Los recursos y los esquemas conceptuales sirven a diferentes propósitos, pero pueden ser usados juntos para entender el razonamiento de los estudiantes, que también está influido por procesos de enseñanza.

En la Tabla 1 se puede observar la descripción de los recursos y los esquemas conceptuales detectados.

6. Actividades ligadas a los usos de las diferenciales como recursos matemáticos de los estudiantes.

6.1 Movimiento armónico-Resorte. Recurso Df-Mq-Mt

Como una propuesta para trabajar con el recurso derivada de una función [Df] y máquina que realiza un algoritmo [Mq], se propone partir de la experimentación con un aparato diseñado para que el estudiante pueda explorarlo e interactuar con él. Se debe tomar en cuenta que, aunque se ha tratado de eliminar la fricción tanto como fue posible, el movimiento del aparato será oscilatorio pero amortiguado.

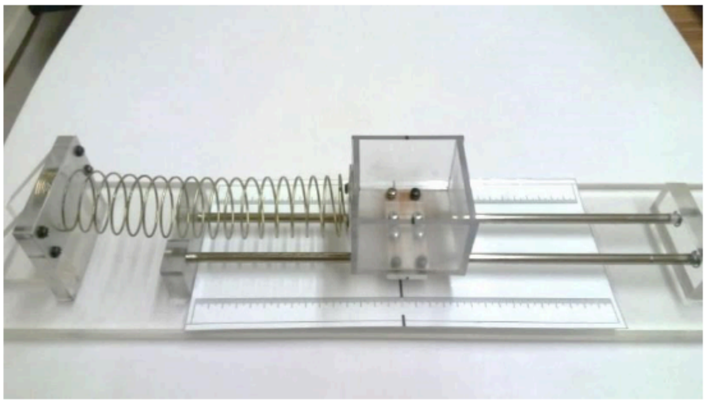

Figura 4. Aparato experimental para movimiento armónico

Posteriormente se propone al estudiante, grabar un video en el que se observen los desplazamientos que se dan cuando acciona el aparato. Luego el video se puede analizar con alguna aplicación de análisis de video como *VidAnalysis*, de la cual se obtienen los datos de distancias recorridas y tiempos transcurridos que permitirán al estudiante disponer de una nube de puntos, como se observa en la Figura 5.

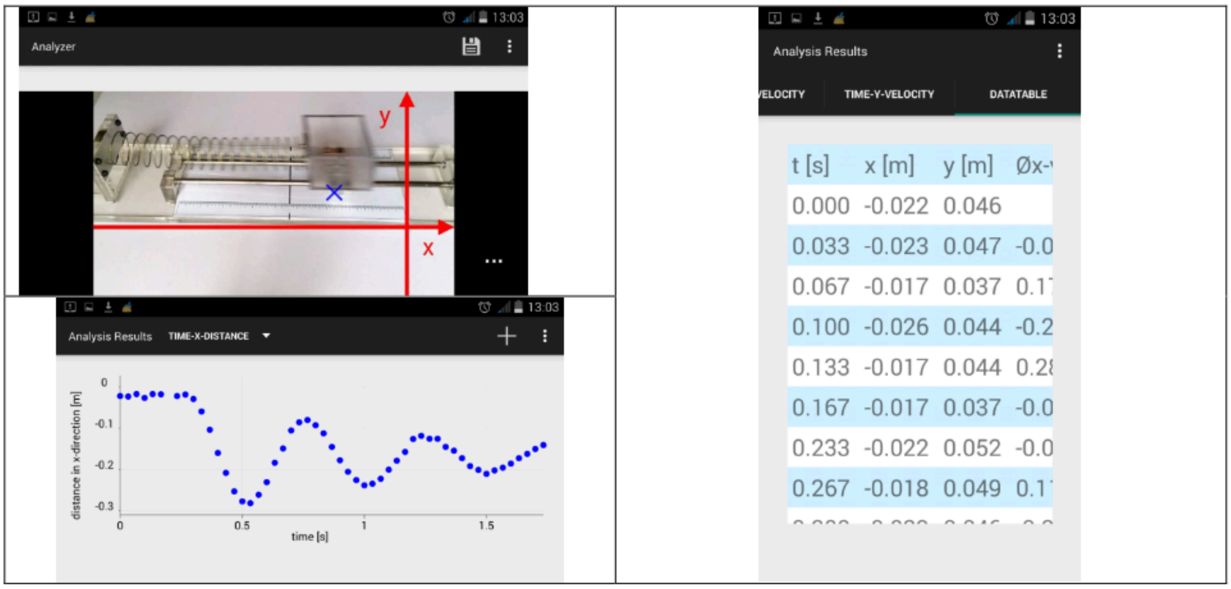

Figura 5. Modelización con VidAnalysis

La nube de puntos puede comenzar a sugerir la existencia de "términos diferenciales" localizados a lo largo de una línea [Ll]. Estos puntos deberán ser interpretados como datos obtenidos, sobre todo los de posición con respecto al tiempo a los que se les puede hacer un ajuste de curva. Para poder hacerlo es necesario exportar los datos, comúnmente se generando una tabla en algún formato codificado para exportarla a alguna hoja de cálculo. En un software de geometría dinámica se pueden hacer distintas aproximaciones de ajuste que pueden resultar interesantes. A partir de la observación de la nube de puntos el estudiante puede apreciar que el modelo matemático que se acerca más al comportamiento de los datos es una función trigonométrica. Aquí proponemos interactuar con un escenario diseñado en *Geogebra* que permita ajustar los parámetros de una función, para realizar un ajuste. No obstante, se tenderá a simplificar el modelo con la intención de que el estudiante pueda tener un acercamiento gradual a su descripción.

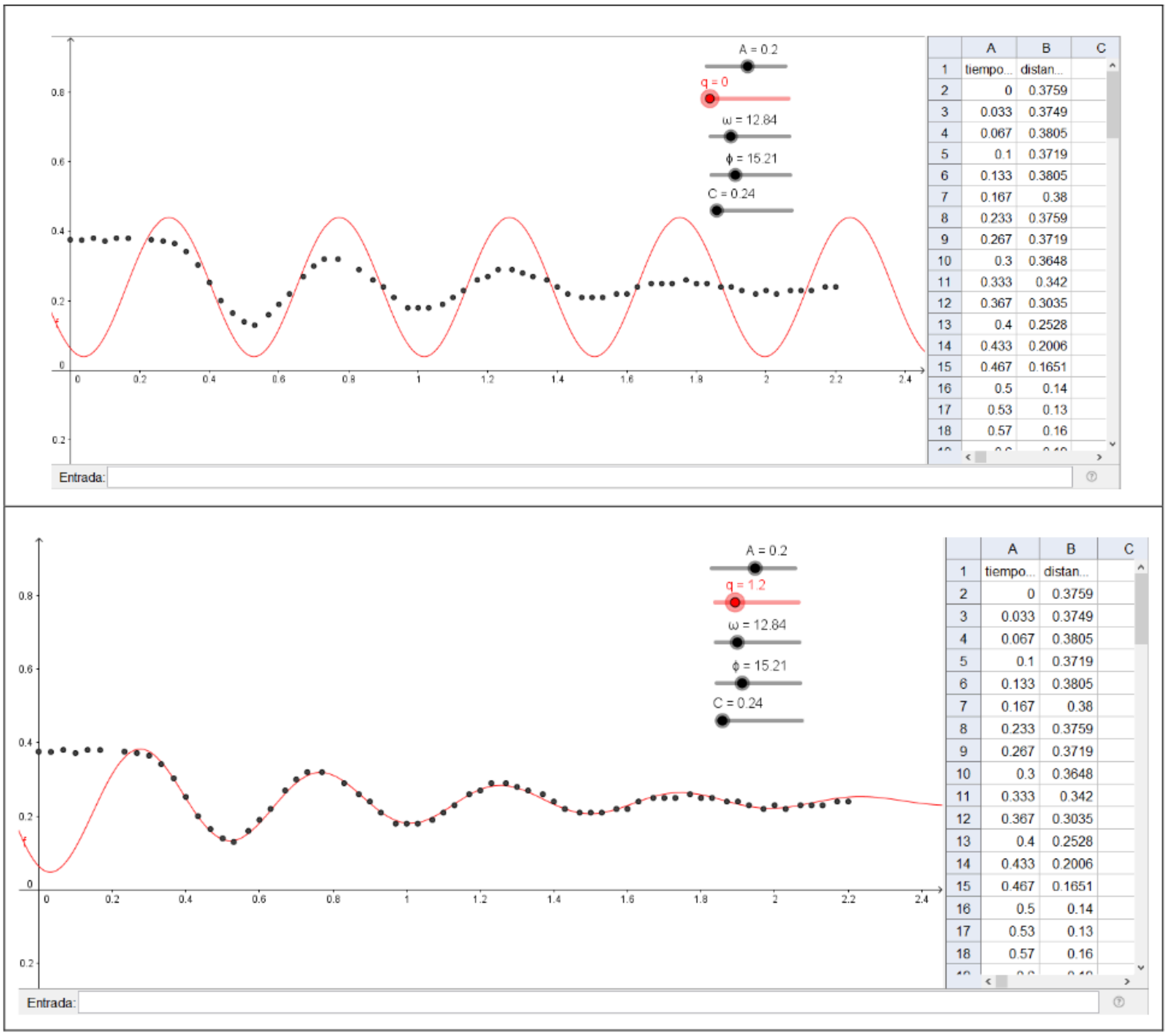

Figura 6. Ajuste con ayuda de Geogebra. a) q=0, b) q=1.2

Para identificar la función asociada al modelo de comportamiento observado, el estudiante puede reducir a cero la acción del agente amortiguador que se identifica con la letra (q) en el escenario, como se observa en la Figura 6.

De esta manera se puede observar que se trata de una curva sinusoidal que se va achatando por la acción de una fuerza de amortiguamiento que depende de las propiedades del agente amortiguador (q).

Sabiendo que el amortiguamiento sigue la tendencia negativa de una función exponencial, se tiene que la función propuesta como modelo para el comportamiento de los datos que describe el desplazamiento del resorte es (se puede verificar con ayuda de la vista gráfica del escenario propuesto):

$$f(t) = Ae^{-qt}\cos(\omega t + \varphi)$$

Y por tanto si se desea calcular la velocidad se tendría que obtener el cambio en el desplazamiento del resorte con respecto a al tiempo, de donde se tiene que:

$$f'(t) = -A\omega e^{-qt} sen(\omega t + \varphi) - kAe^{-qt}\cos(\omega t + \varphi)$$

Este ejemplo permite asociar el recurso de derivada de una función [Df], cuando se ha podido establecer el modelo o función que describe el comportamiento del resorte y el recurso de máquina que realiza un algoritmo [Mq] cuando se calculan tanto la velocidad, como la aceleración correspondiente. Es deseable que para llegar a este punto se haya explicitado previamente la relación que existe entre la derivada y la velocidad. Un acercamiento gráfico podría brindar resultados positivos introduciendo una recta tangente a un punto sobre la función.

6.2 Movimiento armónico simple, caso ideal. Recurso Pc-Mt

Un acercamiento diferente para la descripción del movimiento armónico usando el recurso de derivada como pequeña cantidad [Pc] o el recurso de movimiento a través de una trayectoria se puede hacer por medio de una idealización del problema del resorte como oscilador armónico simple, como se sugiere en algunos textos de física, en los que se pretende describir su movimiento. Para ello se sugiere suponer que se tiene un resorte sin masa que se desplaza sobre una superficie sin fricción por lo que no recibe ninguna acción de amortiguamiento y genera un movimiento armónico simple como se muestra en la Figura 6, con ayuda de otro escenario.

El escenario propuesto se puede visitar en la página de recursos digitales[3] y permite obtener los datos del desplazamiento efectuado por el un resorte ideal, al que se le pueden hacer variar la masa que desplaza, la constante de restitución y la amplitud del desplazamiento.

Se sugiere utilizar los datos proporcionados por la simulación para graficar en lápiz y papel o con algún software las distancias recorridas y los tiempos transcurridos. Una vez que se cuente con ellos se requerirá hacer un ajuste de curva, que como ejercicio conviene hacer por distintas formas de aproximación, como la polinómica, exponencial o logarítmica, pero que será evidente que la mejor será a una función sinusoidal siempre y cuando se cuente con datos suficientes.

Utilizando luego el concepto geométrico de pendiente como razón de cambio de las distancias y tiempos recorridos se puede posicionar un punto sobre la curva encontrada y trazar su pendiente. Esta razón de cambio se interpreta como la velocidad del resorte o como la derivada de la posición con respecto al tiempo, por tanto, se pueden obtener suficientes datos de velocidad y tiempos transcurridos, con los que se puede generar otra gráfica. Se repite el procedimiento y se encontrará que se tendrá otra curva sinusoidal, en la que la pendiente de un punto sobre la curva será la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo, lo que se conoce como aceleración o derivada de la velocidad con respecto al tiempo.

[3] https://www.geogebra.org/m/PMSKc9q7

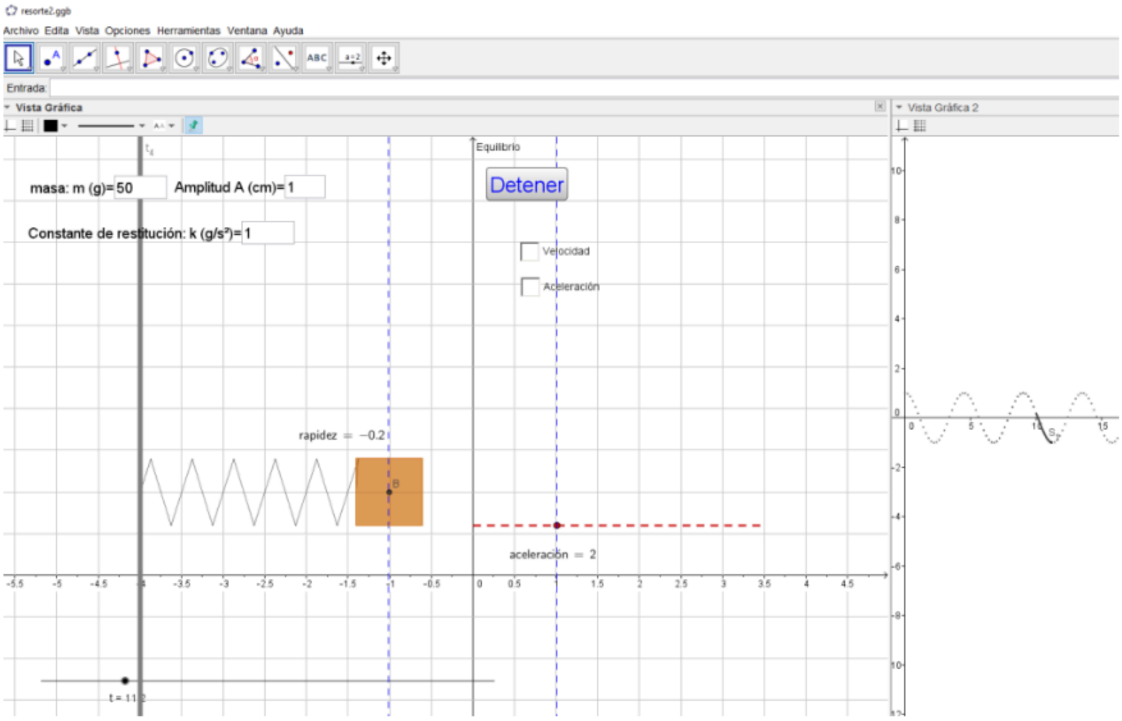

Figura 7. Movimiento armónico simple. Caso resorte ideal

El análisis completo de la situación física permite observar que, en el estudio del movimiento armónico simple, no sólo existen recursos para el uso de la derivada, además se requiere de conocimiento para plantear ecuaciones diferenciales y estrategias de solución, que el profesor podrá introducir utilizando el acercamiento que aquí se propone, para profundizar gradualmente en los conceptos que usualmente se le presentan apresuradamente al estudiante.

Para el caso del resorte ideal que sirve como analogía de un sistema oscilatorio consistente en una partícula, sometida a una fuerza se tiene que:

$$F = -kx \quad ec. 1$$

Donde k es la constante de restitución y x el desplazamiento de la partícula a partir de su posición de equilibrio. Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento tenemos:

$$F = ma = -kx \quad ec. 2$$

Recordando que x representa el desplazamiento, su primera derivada la velocidad y la segunda su aceleración con respecto al tiempo, como se observó en el ejercicio de las pendientes, entonces podemos reescribir que:

$$m\frac{dx^2}{dt^2} = -kx \quad ec. 3$$

Lo que igualando a cero queda como la ecuación del movimiento del oscilador armónico simple:

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad ec. 4$$

La ecuación 4 requiere que x en relación con el tiempo, o sea $x(t)$, sea una función cuya segunda derivada sea la negativa de la función misma, excepto por un factor constante k/m. En los libros de texto se asume que esta propiedad es conocida para las funciones seno y coseno, sin embargo, en el tratamiento que se ha hecho en esta sección, la función seno o coseno surgen de la modelización propuesta. La forma de determinar las posibles soluciones para la ecuación 4 no se discutirán aquí, porque escapan del alcance de este artículo.

6.3 Campo eléctrico en una distribución superficial de carga eléctrica. Recurso Pc-Ob (elemento diferencial)

La propuesta para el estudio de este tema se hace a través de una plataforma digital, como Khan Academy, GoLAb, EdModo, entre otras.

Se ha elegido particularmente Golab, debido a que está basada en un enfoque enseñanza-aprendizaje basado en investigación, dirigido a distintos niveles educativos, por su versatilidad y que además permite enlazar las actividades con distintas aplicaciones informáticas.

En este caso la experiencia observada a través de un video puede permitirle al estudiante hacer interpretaciones del fenómeno y usar la experiencia como medio que puede ser utilizado para su descripción (Figura 8).

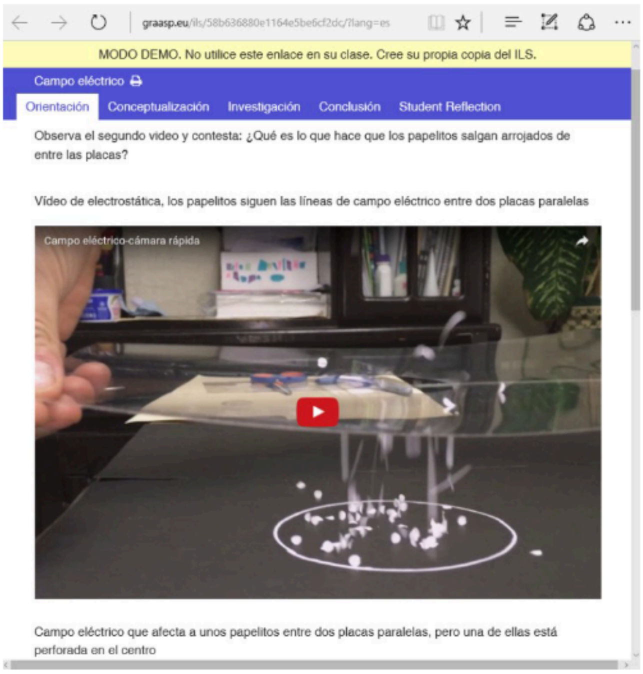

Figura 8. Inquiry Space Learning. Campo eléctrico.

La actividad que se ha propuesto pretende ilustrar el uso de diferenciales, en este caso como punto (Pt), haciendo una discretización del problema utilizando el esquema mental de objetos pequeños[4].

[4] http://graasp.eu/ils/58b636880e1164e5be6cf2dc/?lang=es

Posteriormente existe una aplicación dentro de la plataforma que permite al estudiante plantear hipótesis a partir de sentencias propuestas, que surgen los planteamientos que se hayan hecho inicialmente. De este modo el estudiante puede sentirse con más confianza para elaborar sus propias hipótesis que además podrá contrastar con las conclusiones generadas por el escenario completo (Figura 9).

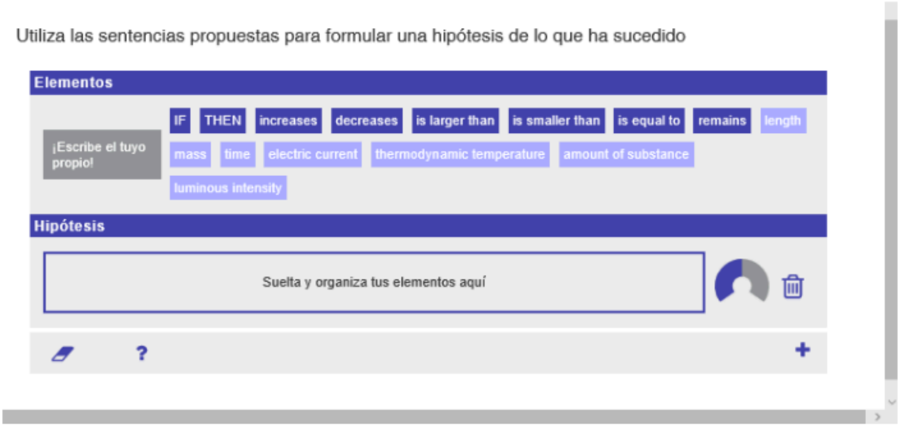

Figura 9. Construyendo hipótesis

El proyecto además se puede dividir en varias fases dependiendo del diseño de la investigación que haya propuesto el profesor. Consistentemente con el modelo de enseñanza por investigación, el profesor tiene un papel fundamental en el diseño de las actividades y en los momentos en que ha decidido realizar la intervención necesaria para guiar el proceso de enseñanza aprendizaje.

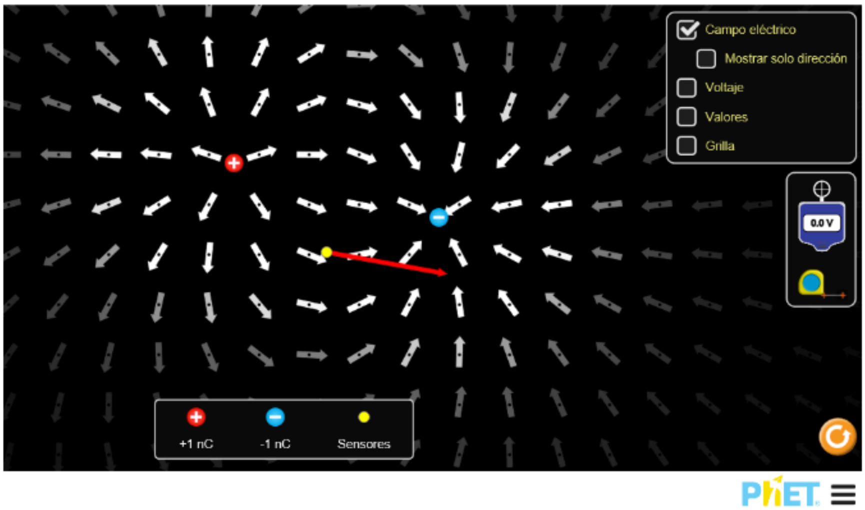

Figura 10. Simulación de campo electro-estático y carga de prueba.

Siguiendo con la descripción de la plataforma, permite hacer ligas para distintas fuentes de consulta electrónicas, así como la interacción con simulaciones disponibles en la red, como las que hay en la plataforma *phet*, que para el problema de campo eléctrico cuenta con la posibilidad de introducir una carga ya sea positiva o negativa, e incluso más y una carga que en física se denomina “de prueba” para identificar la fuerza que actúa sobre una carga de prueba dentro de un campo eléctrico (Figura 10).

A manera de conclusión se presentan las distintas distribuciones de carga eléctrica que corresponden a la geometría de los objetos. Existe un espacio de discusión para interactuar con los estudiantes y relacionar que la geometría que resulta útil para el problema propuesto es la de un disco, que además se puede extender a cualquier superficie plana.

El propósito con el que se desarrolló este "*inquiry learning space*" fue el de introducir la idea de propiedades pequeñas que se dan a distancias también muy reducidas, para contribuir al desarrollo de esquemas mentales más completos en los que los recursos asociados al uso de diferenciales tanto por estudiantes como profesores sean utilizados más libremente, pero sin pérdida de rigor matemático.

Lo que se pretende con todo lo descrito en este artículo es proporcionar un acercamiento diferente al concepto de derivada en el que no necesariamente se tengan que introducir elementos teóricos que tradicionalmente han resultado complicados para poder definirla y enseñarla.

Para una investigación futura se considera viable la aplicación experimental de esta propuesta con estudiantes y profesores para poder afirmar que podrían ser utilizadas las ideas que aquí se presentan como una alternativa de enseñanza del concepto de derivada,

7. Referencias

Alvarenga, B., y Máximo, A. (1988). *Física General con experimentos sencillos*. México. Oxford University Press.

Apostol, T. M. (2009). Calculus. Vol. 1. México. Reverté.

Braun, E. (2007). *Física, 1: mecánica*. México. Trillas.

Corry, L. (1997). David Hilbert and the axiomatization of physics (1894–1905). *Archive for history of exact sciences*, *51*(2): 83-198.

Farmaki, V., Klaudatos, N. y Paschos, T. (2004). Integrating the History of Mathematics in Educational Praxis. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *28*:14-18.

Fernández, M y Rondero, C. (2001). El inicio histórico del movimiento: Implicaciones epistemológicas y didácticas. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, *7*(2):145-156.

Freudenthal, H. (1983). Razón y proporcionalidad. Capítulo XX, Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (Textos seleccionados). Traducción de Luis Puig, 2001, México: Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav. En: http://www.uv.es/puigl/cap6razon.pdf [recuperado el 6 de marzo de 2017].

González-Dávila, A., Arroyo, L. H. y Pita-Larrañaga, A. (2014). *Ciencias 2, Física*. México. Correo del Maestro.

Gutierrez-Aranzeta, C. y Zarzosa-Pérez A. (2015). Acércate a la Física. Segundo Grado. México D.F. Larousse.

Gutiérrez-González, I., Pérez-Aguirre, E. y Medel-Esquivel, R. (2012). *Física, Ciencias 2*. México: Castillo

Halliday, D. y Resnick, R. C. (2009). *Fundamentos de física*. México. CECSA

Hu, D., y Rebello, N. S. (2013). Understanding student use of differentials in physics integration problems. *Physical Review Special Topics-Physics Education Research*, *9*(2): 1-14. doi: 10.1103/PhysRevSTPER.9.020108

Imaz, C. y Moreno, L. (2010). La génesis y la enseñanza del cálculo: Las trampas del rigor. México: Editorial Trillas.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on 'rate' problems. *Educational studies in Mathematics*, *14*(3): 219-233.

Kidron, I. (2011). Tacit models, treasured intuitions and the discrete-continuous interplay. *Educational Studies in Mathematics*, *78*(1):109-126. doi: 10.1007/s10649-011-9313-6

López-Gay, R., Sáez, J. M., y Torregrosa, J. M. (2015). Obstacles to mathematization in physics: the case of the differential. *Science and Education*, *24*(5-6): 591-613. doi: 10.1007/s11191-015-9757-7

Martínez-Uribe A. (2014). *El uso de distintas representaciones del fenómeno de aceleración promueve el cambio conceptual*. Tesis de maestría publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav IPN México, 126 págs.

Martínez-Torregrosa, J., López-Gay, R., & Gras-Martí, A. (2006). Mathematics in physics education: scanning historical evolution of the differential to find a more appropriate model for teaching differential calculus in physics. *Science and Education*, *15*(5): 447-462. doi: 10.1007/s11191-005-0258-y

Moreno-Armella, L. (2014). *Educación Matemática: Del signo al pixel*. Colombia. Universidad Industrial de Santander.

PSSC (1970). Física. España. Reverté.

Redish, E. F. y Kuo, E. (2015). Language of physics, language of math: Disciplinary culture and dynamic epistemology. *Science and Education*, *24*(5-6): 561-590. doi: 10.1007/s11191-015-9749-7

Serway, R. A. y Jewett, J. W. (2008). *Física para ciencias e ingeniería.* Vol. 1. México. Cengage Learning.

Simon, J. (2016). Writing the Discipline: Ganot's Textbook Science and the ''Invention'' of Physics. *Historical Studies in the Natural Sciences*, *46*(3): 392–427. 10.1525/hsns.2016.46.3.392.

Spivak, M. (2010). *Physics for mathematicians*: Mechanics I. United States of America Publish or Perish.

Stewart, I. (2012). Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años. España. Crítica.

Suisky, D. (2009). *Euler as physicist*. Berlin Heidelberg. Springer-Verlag. doi: 10.1007/978-3-540-74865-6 1

Tippens, P. E. (1988). *FISICA. Conceptos y aplicaciones*. México. McGraw Hill.

Touma, G. (2009). Une étude sémiotique sur l'activité cognitive d'interprétation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *14*: 79–101.

Uhden, O., Karam, R., Pietrocola, M. y Pospiech, G. (2012). Modelling mathematical reasoning in physics education. *Science and Education*, *21*(4): 485-506. doi: 10.1007/s11191-011-9396-6